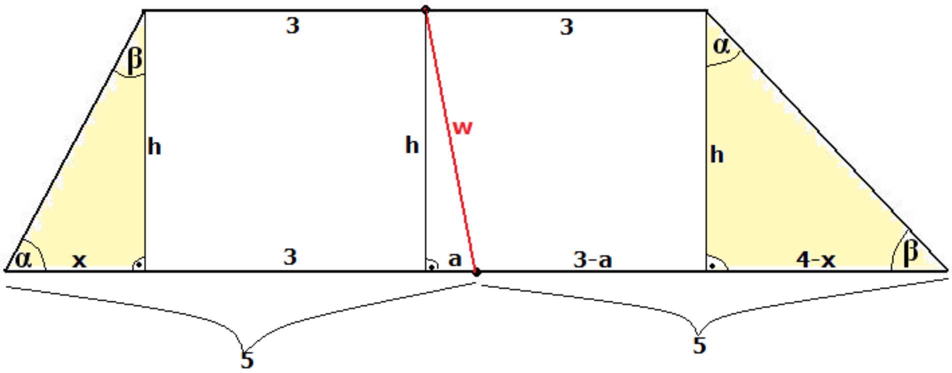
Poniżej znajdują się nadesłane przez nauczyciela tematy trzech zadań, oraz propozycje ich rozwiązań. Zadania pochodzą ze zbiorów służących do przygotowania do matury 2010.

1. Podstawy trapezu mają długości **10** i **6**. Suma miar kątów wewnętrznych czworokąta przy dłuższej podstawie jest równa $\mathbf{90^0}$. Oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw.

Rozwiązanie



Trójkąty oznaczone kolorem są podobne, bo mają takie same kąty. Wobec tego mamy równanie:

$$\frac{h}{x} = \frac{4-x}{h} \quad \Leftrightarrow \quad h^2 = x(4-x)$$

Poza tym:

$$x + 3 + a = 5 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2 - x$$

Teraz liczymy niewiadomą w:

$$w^2 = h^2 + a^2 = x(4-x) + (2-x)^2 = 4x - x^2 + 4 - 4x + x^2 = 4$$
$$w = 2$$

2. W prostokątnym układzie współrzędnych narysuj zbiór tych wszystkich punktów o współrzędnych (b, c), dla których różne pierwiastki x_1, x_2 równania $x^2 - bx - 2c = 0$ spełniają warunek $(x_1 + x_2)^3 < x_1^3 + x_2^3 - 6$.

Rozwiązanie

Mają być różne pierwiastki, czyli:

$$\Delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 + 8c > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8c > -b^2$$

$$c > -\frac{1}{8}b^2$$

Ten warunek spełniają wszystkie punkty leżące nad parabolą o równaniu $c = -\frac{1}{8}b^2$.

Drugi z warunków, który musi być spełniony jest podany w temacie zadania:
$(x_1 + x_2)^3 < x_1^3 + x_2^3 - 6$

$x_1^3 + 3x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 + x_2^3 < x_1^3 + x_2^3 - 6$

$3x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 < -6$

$3x_1 x_2 (x_1 + x_2) < -6$

$x_1 x_2 (x_1 + x_2) < -2$

Korzystamy ze wzorów Viete'y:
$x_1 x_2 = -2c\,, \quad x_1 + x_2 = b$

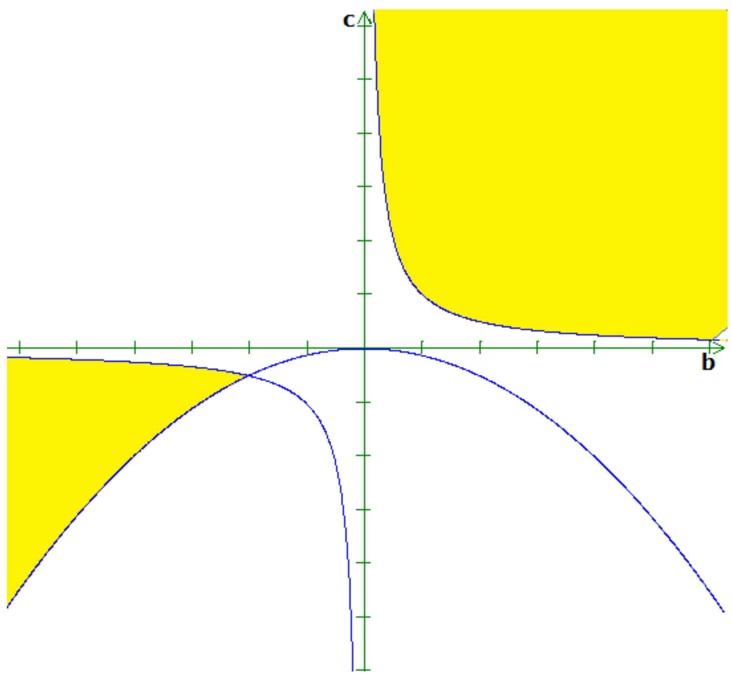
Mamy:
$-2c \cdot b < -2$

$c \cdot b > 1$

Zakładamy, że $b \neq 0$ ($b = 0$ nie spełnia tej nierówności) i mamy:

a) Dla $b > 0$: $c > \frac{1}{b}$ - zbiór punktów nad hiperbolą o równaniu $c = \frac{1}{b}$

b) Dla $b < 0$: $c < \frac{1}{b}$ - zbiór punktów pod hiperbolą o równaniu $c = \frac{1}{b}$



Szukany zbiór zaznaczony jest kolorem żółtym (bez brzegów).

3. Wykaż, że jeśli ciąg $(\boldsymbol{a_n})$ jest ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich, to ciąg o wyrazie ogólnym $\boldsymbol{b_n = \log_p a_n}$ dla $\boldsymbol{p} > 0$ i $\boldsymbol{p \neq 1}$ jest ciągiem arytmetycznym.

Rozwiązanie

Wiadomo, że $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q = const.$ oraz $a_n > 0$ dla $n \in N_+$.

Z powyższych danych wynika również, że $q > 0$.

Należy udowodnić, że $b_{n+1} - b_n = const.$ dla $n \in N_+$.

$$b_{n+1} - b_n = \log_p a_{n+1} - \log_p a_n = \log_p \frac{a_{n+1}}{a_n} = \log_p q = const.$$

Tym samym dowód jest zakończony.