

## Tematy: zadania tematyczne

### 1. Ciągi liczbowe – zadania typu „udowodnij...”

- 1) Udowodnij, że jeżeli liczby  $a^2, b^2, c^2$  tworzą ciąg arytmetyczny ( $r \neq 0$ ), to liczby  $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}$  także tworzą ciąg arytmetyczny.
- 2) Ciąg  $a_n$  jest ciągiem geometrycznym. Wykaż, że ciąg  $b_n = a_{n+1} - a_n$  także jest ciągiem geometrycznym.
- 3) Wykaż, że suma kwadratów trzech kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego o wyrazach całkowitych jest podzielna przez sumę tych wyrazów.
- 4) Wykaż, że jeżeli trzy liczby dodatnie  $a, b, c$  tworzą ciąg geometryczny, to ich logarytmy tworzą ciąg arytmetyczny.
- 5) Wykaż na podstawie definicji, że:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n}{3n+2} = 2$$

\*\*\*\*\*

### 2. Funkcje trygonometryczne – nietypowe zadania

- 1) Dany jest trójkąt o bokach  $a, b, c$  oraz kątach  $\alpha, \beta, \gamma$ . Udowodnij, że między obwodem trójkąta, a promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie zachodzi związek:  $a + b + c = 8R \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$
- 2) Znajdź największą wartość iloczynu  $\sin \alpha \cdot \sin \beta$ , jeżeli  $\alpha$  i  $\beta$  są to miary kątów ostrych pewnego trójkąta prostokątnego.
- 3) Wiedząc, że  $3 \sin x = 2(1 - \cos x)$ , oblicz  $\operatorname{tg} x$ .
- 4) Wyznacz zbiór wartości funkcji  $y = \sin 2x - \cos \left(\frac{\pi}{6} + 2x\right)$
- 5) Wyznacz największą wartość funkcji  $f(x) = \sin x \cos x + \cos^2 x$
- 6) Rozwiąż równanie  $1 + x^2 - \cos x = 0$
- 7) Udowodnij, że w zbiorze liczb rzeczywistych spełniona jest nierówność:

$$\sin^6 x + \cos^6 x \geq \frac{1}{4}$$

- 8) Rozwiąż nierówność:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{\sqrt{3}}(\operatorname{ctg} x) - 1} > 1$$

\*\*\*\*\*

### 3. Funkcje z wartością bezwzględną

- 1) Dana jest funkcja  $f$ , której wykresem jest prosta przechodząca przez punkty  $A = (1, 6)$  i  $B = (-3, -2)$ . Rozwiąż równanie:  $|f(2x)| = 4$ .
- 2) Narysuj wykres funkcji  $y = x - |5 - x|$
- 3) Narysuj wykres funkcji  $y = |x + 1| + \sqrt{x^2}$
- 4) Narysuj wykres funkcji  $y = \frac{x^2 - 1}{|x + 1|}$
- 5) Narysuj wykres funkcji  $y = ||x + 1| - 2|$
- 6) Narysuj wykres funkcji  $y = (x + 1) \cdot |x - 2|$

\*\*\*\*\*

### 4. Zadania z geometrii analitycznej

- 1) Odcinek o końcach  $A = (3, -2)$  i  $B = (6, 4)$  został podzielony na trzy równe części. Oblicz współrzędne punktów podziału.

- 2) Oblicz pole figury  $A = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \wedge xy < 0\}$
- 3) Do okręgu o środku  $S = (1, 1)$  należy punkt  $A = (2, 2)$ . Oblicz pole trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg.
- 4) Wyznacz punkty wspólne okręgu  $x^2 + 6x + y^2 = 16$  z osiami układu współrzędnych.
- 5) Napisz równanie symetralnej odcinka wyciętego z prostej  $2x + 3y + 6 = 0$  przez osie układu współrzędnych.
- 6) Dane są dwa wierzchołki trójkąta:  $A = (-2, 4)$  i  $B = (5, -2)$ . Wyznacz trzeci wierzchołek  $C$  tak, aby środek boku  $BC$  leżał na osi odciętych, a środek boku  $AC$  - na osi rzędnych.
- 7) Zaznacz na płaszczyźnie  $XOY$  zbiór  $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4 \vee x^2 - y^2 = 0\}$ .

\*\*\*\*\*

### 5. Granica i ciągłość funkcji – nietypowe zadania

- 1) Wykaż, że nie istnieje granica:  

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$$
- 2) Sprawdź, czy funkcja  $f(x) = x^2 \cdot \frac{3^x + 1}{3^x - 1}$  jest nieparzysta, a następnie oblicz granicę:  

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$
- 3) Znajdź wszystkie liczby  $x \in \mathbb{R}$ , które spełniają równanie:  

$$x^3 = \lim_{y \rightarrow \infty} [(x + y)(y + x^2) - y^2]$$
- 4) Niech  $f(a)$  będzie liczbą pierwiastków rzeczywistych równania  

$$x^2 - 2x - \log_{\frac{1}{2}}(a^2 - 7) = 0$$
  
 Podaj wzór funkcji  $f(a)$  i sprawdź, czy istnieje granica:  

$$\lim_{a \rightarrow 3} f(a)$$
- 5) Dla jakich  $a \neq 1$  nierówność:  

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a^3 - 2)x^2 + 3ax - 1}{(a + 1)x^2 + 2x - 3} \leq a - 2$$
  
 jest prawdziwa?
- 6) Dla jakich wartości parametru  $a$  funkcja:  

$$f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & \text{dla } x \geq 1 \\ (x - a)^2 & \text{dla } x < 1 \end{cases}$$
  
 jest ciągła w zbiorze liczb rzeczywistych?

\*\*\*\*\*

### 6. Nietypowe zadania z różnych działów

- 1) Jaką figurę opisuje układ równań z parametrem  $t$ :  

$$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \text{ gdy } t \in (-1, 1)?$$
- 2) Oblicz minimum sumy  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  dla  $x > 0$  i  $y > 0$ , jeżeli wiadomo, że  $x + y = 1$ .
- 3) Dany jest ciąg  $a_n = \left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{3}\right)^n$ ,  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .  
 Dla jakich wartości suma wszystkich wyrazów ciągu jest równa  $\frac{\log 3}{\log 9}$ ?
- 4) Oblicz granice:  

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{7^{\frac{1}{x}}}{1 + 7^{\frac{1}{x}}}$$
  
 oraz

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{7^{\frac{1}{x}}}{1 + 7^{\frac{1}{x}}}$$

- 5) Krawędź boczna ściętego ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 1 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem  $\beta$ . Przekątna ostrosłupa jest prostopadła do krawędzi bocznej. Oblicz objętość ostrosłupa.
- 6) Na okręgu o danym promieniu  $r$  opisano trapez, na którym opisano okrąg o promieniu  $R$ . Jeden z boków trapezu ma długość  $r$ . Oblicz pole trapezu i promień  $R$ , przyjmując, że  $r$  jest dane.
- 7) Która z liczb jest większa:  $\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$  czy  $\sqrt[3]{5}(2 + \sqrt{3})$  ?
- 8) Rozwiąż nierówność:  $\frac{\log^2 x - 1}{x-5} < 0$
- 9) Oblicz  $a$  wiedząc, że  $\operatorname{tg} \alpha = 3^a$ ,  $\operatorname{tg} \beta = 3^{-a}$  oraz  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{6}$
- 10) Rozwiąż równanie:  

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^x \cdot n^2 + 3n}{2n^2 + 4n - 1} = \sqrt{8}$$
- 11) Udowodnij, że jeżeli dla kątów  $\alpha, \beta, \gamma$  trójkąta zachodzi związek  $\sin \gamma = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$ , to trójkąt jest prostokątny.
- 12) Udowodnij, że dla każdego  $n$  naturalnego, wielomian  $W(x) = x^{4n-2} + 1$  jest podzielny przez  $x^2 + 1$ .
- 13) Promień kuli zwiększono tak, że pole jej powierzchni wzrosło o 44%. O ile procent wzrosła jej objętość?
- 14) Wyznacz dziedzinę i zbiór wartości funkcji:  $f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{x} - x}$
- 15) W układzie współrzędnych zaznacz zbiór punktów, których współrzędne spełniają równanie  $y^2 = x^4$ .
- 16) Śmigło helikoptera ma 4 m długości i wykonuje 50 obrotów na minutę. Z jaką prędkością porusza się koniec śmigła?
- 17) W trójkącie równoramiennym  $ABC$  podstawa  $AB$  i wysokość  $CD$  mają jednakową długość 4. Oblicz długość promienia okręgu stycznego w punktach  $A$  i  $B$  do prostych, w których zawarte są ramiona trójkąta.
- 18) W kole o promieniu 5 poprowadzono dwie równoległe cięciwy, oddalone od siebie o 1. Oblicz długości cięciw wiedząc, że różnica ich długości wynosi 2.
- 19) Kwadrat  $ABCD$  wpisano w okrąg o promieniu  $R$ . Wykazać, że dla dowolnego punktu  $M$  leżącego na tym okręgu zachodzi równanie:  
 $|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 + |MD|^2 = 8R^2$
- 20) W kole o środku  $S$  poprowadzono dwie prostopadłe średnice  $AB$  i  $CD$ . Z punktu  $A$  prowadzimy cięciwę  $AM$  przecinającą średnicę  $CD$  w punkcie  $N$ . Wyznacz miarę kąta, jaki ta cięciwa tworzy ze średnicą  $AB$ , jeżeli wiadomo, że w czworokąt  $SBMN$  można wpisać okrąg.
- 21) Z punktu  $P$  odległego o 11 od środka okręgu o promieniu 7 poprowadzono sieczną tak, że długości odcinków, których końcami są punkty przecięcia tej siecznej z okręgiem i punkt  $P$  są równe. Oblicz długość odcinka siecznej zawartego wewnątrz okręgu.
- 22) Przez środek boku trójkąta równobocznego poprowadzono prostą, tworzącą z tym bokiem kąt  $30^\circ$  i dzielącą trójkąt na dwie części. Oblicz stosunek pola mniejszej z tych części, do pola danego trójkąta.

23) Wyznacz długości podstaw trapezu równoramiennego, w którym ramię ma długość 3, jedna z podstaw jest dwa razy dłuższa, niż druga, a przekątna dzieli kąt przy dłuższej podstawie na połowy.

24) Wyznacz zbiór wartości funkcji:  $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin x\right)$

25) W trójkącie prostokątnym stosunek sumy długości przyprostokątnych do długości przeciwprostokątnej jest równy  $\sqrt{2}$ . Wyznacz kąty ostre tego trójkąta.

\*\*\*\*\*

### 7. Pochodna funkcji - zadania

1) Korzystając z definicji oblicz  $f'(x)$  dla  $f(x) = \frac{1}{2x}$

2) Oblicz pochodną funkcji oblicz  $f(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x} \cdot x}$

3) Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$  w punktach o odciętych 0 i 1. Znajdź kąt między tymi stycznymi.

4) Dla jakich wartości parametru  $k$  funkcja  $f(x) = x^3 - x^2 + kx$  jest rosnąca dla  $x \in R$ ?

5) Wyznacz z równania  $\frac{1}{y-1} - \frac{1}{x+1} = 2$   $y$  jako funkcję zmiennej  $x$ , a następnie zbadaj jej monotoniczność.

6) Funkcja  $f(x) = \frac{ax+b}{(x-1)(x-4)}$  osiąga ekstremum równe  $-1$  przy  $x = 2$ . Rozstrzygnij, czy jest to minimum, czy maksimum.

7) Suma  $n$  początkowych wyrazów ciągu  $a_n$  wyraża się wzorem  $S_n = \frac{2n-5}{n^2+4n+140}$   
Dla jakiego  $n$  suma jest największa?

8) Dla jakich wartości parametru  $a$  równanie  $x^3 - 3x - a = 0$  ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste?

\*\*\*\*\*

### 8. Układy równań I stopnia z parametrem

1) Dany jest układ równań:

$$\begin{cases} ax + 2y = 1 \\ 8x + ay = b \end{cases}$$

Omów liczbę rozwiązań tego układu w zależności od parametrów  $a$  i  $b$ .

2) Dla jakich  $m \in R$  układ  $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - my = 7 \end{cases}$  jest sprzeczny?

3) Narysuj wykres funkcji  $f(m)$ , która jest ilością rozwiązań układu:

$$\begin{cases} (m-1)x + 3y = 5 \\ mx - 2y = 4 \end{cases}$$

4) Rozwiąż układ równań z parametrem  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Dla jakich wartości  $\alpha$  suma  $x^2 + y^2$  jest równa 1, 5?

$$\begin{cases} x \sin \alpha - y \cos \alpha = \sin \alpha \\ x \cos \alpha + y \sin \alpha = 1 \end{cases}$$

5) Dla jakich wartości parametru  $m$  rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} x + 3y - 4 = 0 \\ x - 6y + m = 0 \end{cases}$$

jest para liczb rzeczywistych, z których jedna jest tangensem, a druga cotangensem tego samego kąta ostrego?

\*\*\*\*\*

### 9. Wielomian z parametrem

- 1) Wielomian  $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ,  $a \neq 0$  ma pierwiastki: 1, 2, i 3. Wyznacz  $\frac{W(0)}{W(-1)}$
- 2) Wyznacz taką wartość parametru  $m$ , aby liczba 3 była pierwiastkiem wielomianu  $W(x) = 2x^3 - 5x^2 + mx + 9$
- 3) Dla jakich wartości parametru  $k$ , wielomian  $W(x) = x^3 + 4^k \cdot x^2 - 11x - 12$  jest podzielny przez  $x + 1$ ?
- 4) Dla jakich wartości  $a$  i  $b$  wielomian  $W(x) = 3x^3 + ax^2 + bx - 4$  jest podzielny przez  $x^2 - 1$ ?
- 5) Dla jakich wartości parametru  $k$ , reszta z dzielenia wielomianu  $W(x) = x^3 + 2x^2 + k^2x - 8$  przez dwumian  $x + 1$  wynosi  $-11$ ?
- 6) Rozwiąż równanie  $\cos 2x + \sin x = p^2 + 4q + 3$ , jeżeli wiadomo, że  $y^2 - 1$  jest dzielnikiem wielomianu  $y^3 + py^2 + qy + 1$ .

\*\*\*\*\*

### 10. Własności ciągów liczbowych

- 1) Wyznacz dwunasty wyraz ciągu  $a_n$ , jeżeli suma jego  $n$  początkowych wyrazów wyraża się wzorem  $S_n = (-1)^n \cdot n^2$ .
- 2) Wykaż, że ciąg  $a_n = \frac{1-3n}{n}$  jest ograniczony.
- 3) Zbadaj monotoniczność ciągu  $a_n = \frac{1}{n^2+5n+4}$
- 4) Wyznacz te wartości parametru  $k$ , dla których ciąg  $a_n = (-1)^n + kn$  jest rosnący.