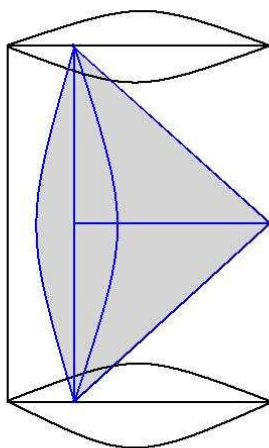


Tematy zadań określonych jako „rozmaite”

1. Siedem ciekawych zadań

1. Oblicz długość pasa w przekładni pasowej, mając dane długości promieni kół: 40cm i 10cm, oraz odległość środków tych kół równą 60 cm.
2. Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = x^2 + x + 1$. Wyznacz wszystkie wielomiany, dla których zachodzi warunek $f(g(x)) = 4x^2 + 6x + 3$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.
3. Wyprowadź podawany w tablicach matematycznych wzór: $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ (zadanie rozwiąż nie korzystając ze wzorów na wartości funkcji trygonometrycznych kąta 36°).
4. W pewnej chwili awionetka lecąca na zachód z prędkością $360 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ przelatuje dokładnie nad autobusem, jadącym po płaskiej drodze na południowy zachód z prędkością $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Awionetka leci na wysokości 2km. Jaka będzie odległość między awionetką i autobusem po upływie 30 sekund? Wynik podaj z dokładnością do 1m.
5. Wykaż, że funkcja homograficzna dana wzorem $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$ jest różnowartościowa.
Udowodnij, że funkcja odwrotna do funkcji homograficznej, jest też funkcją homograficzną.
6. Bok kwadratu ABCD ma długość a . Wierzchołek A połączono ze środkami E i F odpowiednio boków BC i CD. Wykaż, że odcinki AE i AF dzielą przekątną BD na trzy odcinki równej długości.
7. W walcu, którego promień podstawy ma długość r , umieszczono stożek. Stożek jest tak położony, że osie obu brył są prostopadłe, wierzchołek stożka należy do pobocznic walca, zaś podstawa stożka ma po jednym punkcie wspólnym z podstawami walca i dwa punkty wspólne z poboczną walca (rysunek).



Oblicz objętości walca i stożka, wiedząc, że długość średnicy podstawy stożka jest równa długości jego tworzącej.

2. Dziesięć różnych zadań

1. W trójkącie ABC wysokość CD i środkowa CE dzielą kąt ACB na trzy równe części. Wyznacz miarę tego kąta.

2. Znaleźć zbiór środków wszystkich okręgów przechodzących przez punkt $P = (3,2)$ i stycznych do osi OX.
3. Rozwiąż nierówność $x^{\log_3 x} + x^{2\log_3 x} > 12$.
4. W kwadracie zawarty jest prostokąt o bokach odpowiednio równoległych do przekątnych kwadratu. Wykaż, że pole prostokąta nie jest większe od połowy pola kwadratu.
5. W trapezie ABCD łączymy środek M ramienia AB z końcami ramienia CD. Wykazać, że pole powstałego trójkąta CMD jest połową pola trapezu.
6. Ustal, dla jakich naturalnych n, wyrażenie $\frac{n^3 - n^2 + 2}{n - 1}$ jest liczbą całkowitą.
7. Boki trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 10cm. W trójkąt wpisujemy trzy jednakowe koła styczne parami do siebie, każde jest styczne do dłuższej przyprostokątnej, pierwsze jest również styczne do krótszej przyprostokątnej, a trzecie jest również styczne do przeciwprostokątnej. Oblicz długość promieni tych kół.
8. Wyznaczyć liczby wymierne a i b spełniające warunek: $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{6} + \sqrt{11}$.
9. Rowerzysta przebył drogę $AB = 60\text{km}$ jadąc za stałą prędkością. W drodze powrotnej po godzinie jazdy z taką samą prędkością, zatrzymał się na 20 minut, a pozostałą część drogi odbył z prędkością zwiększoną o $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Okazało się, że droga w obie strony trwała tyle samo czasu. Z jaką prędkością rowerzysta jechał z A do B?
10. Znaleźć taką zależność między p i q, aby równanie $x^4 + px^2 + q = 0$ miało cztery pierwiastki tworzące ciąg arytmetyczny.

3. 20 różnych zadań

1. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych spełniających układ równań:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 2^x + 3^y = 25 \end{cases}$$
2. Wyznacz liczbę rozwiązań równania $|x^2 + 3x| + 1 = k$ w zależności od parametru k.
3. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n, liczba postaci $\frac{10^n + 4^n - 2}{6}$ jest całkowita.
4. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność:

$$\frac{\log 1 + \log 2 + \log 3 + \dots + \log n + \log(n+1)}{n+1} > \frac{\log 1 + \log 2 + \log 3 + \dots + \log n}{n}$$
5. Dane są długości boków b i c trójkąta ABC. Znajdź długość trzeciego boku, jeżeli kąt leżący naprzeciw tego boku jest dwa razy większy od kąta leżącego naprzeciw boku b.
6. W urnie znajduje się n kul białych, 2n kul czarnych i 3n kul zielonych. Losujemy 3 kule. Co jest większe: prawdopodobieństwo, że wszystkie kule będą tego samego koloru, czy też prawdopodobieństwo, że każda kula będzie innego koloru?
7. Rozwiązać równanie: $\text{tg}^2(x+y) + \text{ctg}^2(x+y) = 1 - 2x - x^2$
8. Na pewnej drodze przednie koło wozu zrobiło 480 obrotów, a tylne, którego obwód jest o 60cm większy, tylko 360 obrotów. Oblicz obwód każdego koła i długość przebytej drogi.

9. Udowodnij, że przekątne trapezu o bokach a, b, b, b są dwusiecznymi kątów przy boku a .

10. Narysuj wykres funkcji: $y = \frac{|x+4|}{x+4} + x - 3$

11. Do dwóch okręgów o promieniach 2cm i 9cm poprowadzono wspólną styczną przecinającą odcinek łączący środki okręgów. Wiedząc, że odległość środków okręgów wynosi 22cm, oblicz długość odcinka stycznej zawartego między punktami styczności.

12. Obwód prostokąta wynosi 80 cm. Dwusieczna jednego z kątów dzieli obwód na dwie części różniące się o 20 cm. Oblicz pole prostokąta.

13. Udowodnij, że w trójkącie równobocznym suma odległości dowolnego punktu wewnętrznego tego trójkąta od boków trójkąta jest wielkością stałą.

14. Wykazać, że w trójkącie prostokątnym równoramiennym suma odległości dowolnego punktu przeciwprostokątnej od obydwu przyprostokątnych jest równa długości jednej przyprostokątnej.

15. Średnia wieku drużyny piłkarskiej (11 osób) wynosi 22 lata. Jeden z piłkarzy otrzymał czerwoną kartkę i zszedł z boiska. Średnia wieku pozostałych zawodników wynosi teraz 21 lat. Ile lat miał piłkarz, który otrzymał czerwoną kartkę?

16. Piła ma 60 cm długości i równe ząbki będące trójkątami równoramiennymi. Wysokość każdego z ząbków jest równa $\frac{2}{3}$ jego podstawy.

Jaką drogę przejdzie mrówka maszerując po ostrzach kolejnych ząbków piły?

17. W trójkącie równoramiennym dany jest kąt α przy podstawie. Obliczyć stosunek pola koła opisanego na tym trójkącie do pola tego trójkąta.

18. Dla jakich wartości m funkcja $f(x) = mx^3 - (m+2)x^2$ ma ekstremum w punkcie $x_0 = 1$? Wyznaczyć to ekstremum.

19. Wyznaczyć dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{\frac{\sin^2 x - 1}{2\cos x - 1}}$

20. W prawidłowym graniastosłupie trójkątnym, krawędź podstawy równa się a , zaś kosinus kąta między przekątnymi ścian bocznych, wychodzącymi ze wspólnego wierzchołka jest równy $\frac{19}{20}$. Obliczyć objętość graniastosłupa.

