Tematy zadań – porady.

1. **Co można, a czego nie można zrobić z równaniem i dlaczego?**
   1) **Rozwiąż równanie: $\sqrt{4-x} = x-2$**

2. **Co można, a czego nie można zrobić z nierównością i dlaczego?**
   1) **Rozwiąż nierówność: $\sqrt{4-x} > x-2$**

3. **Nie panikuj!!! 10 przykładowych zadań, na których widok przeciętny maturzysta dostaje oczopląsu, a które rozwiązuje się w kilku linijkach.**
   1) **Wykaż, że suma kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych parzystych jest podzielna przez 4 i nie jest podzielna przez 8.**
   2) **Dana jest funkcja $f\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right) = 2x-\frac{1}{2}$. Wyznacz wzór funkcji f.**
   3) **Napisz 3 początkowe wyrazy ciągu wiedząc, że suma n początkowych wyrazów ciągu jest równa $S_n = n^3 - 5n$.**
   4) **Pole powierzchni wielościanu opisanego na kuli o promieniu R jest równe S. Oblicz objętość wielościanu.**
   5) **Wanna napełnia się całkowicie wodą w ciągu 10 minut, a opróżnia w ciągu 15 minut. Jak długo będzie trwało napełnianie wanny, jeżeli jednocześnie odkręcimy kran i otworzymy odpływ?**
   6) **Niech n będzie dodatnią liczbą naturalną parzystą. Ile różnych rozwiązań ma równanie postaci: $x^{n+1} - x^n - 64x + 64 = 0$?**
   7) **W ciągu $(1\cdot 2, 2\cdot 3, 3\cdot 4, 4\cdot 5, 5\cdot 6, \ldots)$ znajdź kolejne dwa wyrazy różniące się o 2000.**
   8) **Rozstrzygnij, czy istnieje trójkąt, którego wysokości mają długości 1, 2 i 3.**
   9) **Rozwiąż równanie: $x^{\frac{2}{3}} + 8 = 9x^{\frac{1}{3}}$.**
   10) **Pierwiastki trójmianu kwadratowego $y = 4x^2 - 8x + c$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Oblicz c.**

4. **Co jest najważniejsze w temacie zadania? Jak zabierać się za rozwiązywanie zadania?**
   1) **Wysokość trapezu równoramiennego wynosi 5 cm, a jego przekątna ma 13 cm długości. Oblicz pole trapezu.**

5. **Zadania z parametrem.**
   1) **Dla jakich m suma odwrotności różnych pierwiastków równania $(2m+1)x^2 - (m+3)x + 2m + 1 = 0$ jest większa od 1?**
   2) **Znajdź takie wartości parametru $m \in R$, dla których jeden z pierwiastków równania $(2m+1)x^2 + \frac{8}{3}mx + \frac{2}{3}m = 0$ jest sinusem, a drugi cosinusem tego samego kąta.**
   3) **Zbadaj liczbę rozwiązań równania $x + k\sqrt{x} = k$ w zależności od wartości parametru k.**
   4) **Dla jakich m nierówność $(m^2 + 5m - 6)x^2 - 2(m-1)x + 3 > 0$ jest spełnione dla każdego $x \in R$?**

5) Dla jakich m funkcja $f(x)=(m-4)x^2-4x+m-3$ ma dwa miejsca zerowe, z których jedno jest mniejsze od 1, a drugie większe od 1?
6) Wyznacz a i b wiedząc, że liczba 3 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)=x^3-5x^2+ax+b$.
7) Dla jakich m równanie $(m-3)\cdot 9^x-(2m+6)\cdot 3^x+m+2=0$ ma dwa różne pierwiastki?
8) Dla jakich wartości parametru m równanie $m^2(1-\sin x)-4m+\sin x+1=0$ ma rozwiązanie?
9) Dla jakich wartości parametru $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ prosta $y=2x$ jest styczna do wykresu funkcji $f(x)=x^3-x-\cos 2\alpha-\sin\alpha+3$?
10) Dla jakich wartości parametrów a i b reszta z dzielenia wielomianu $W(x)=x^3+2x^2+ax+b$ przez wielomian $P(x)=x^2+x-2$ jest równa $R(x)=4x-3$?

6. Zadania tekstowe, zwane też „zadaniami z treścią".
1) Na zgaduj zgaduli postawiono 30 pytań. Za każda poprawną odpowiedź zaliczano 7 punktów, zaś za każda nieprawidłową uczestnik tracił 12 punktów. Ile dobrych odpowiedzi dał jeden uczestników, jeżeli przy podsumowaniu okazało się, że zdobył 77 punktów?
2) Przewiduje się, że wycieczka szkolna będzie kosztować 270 zł dziennie. Gdyby udało się ten koszt obniżyć o 54 zł, to za tę samą kwotę możnaby zorganizować wycieczkę o 3 dni dłuższą. Ile dni miała trwać wycieczka?
3) Zmieszano 1000 litrów mleka o zawartości 4,2% tłuszczu i 500 litrów mleka o zawartości 3,6% tłuszczu. Ile procent tłuszczu zawierała otrzymana mieszanka?
4) Znajdź liczbę 6-cio cyfrową wiedząc, ze jej pierwszą cyfrą jest 3, zaś po przestawieniu trójki na koniec uzyskamy liczbę stanowiąca 25% liczby szukanej.
5) Dziadek i babka mają razem 140 lat. Dziadek ma obecnie dwa razy tyle, co babka miała wtedy, gdy dziadek miał tyle, ile babka ma teraz. Ile lat ma dziadek, a ile babka?
6) Do magazynu dostarczono tyle worków cukru, ile waży cukier w każdym worku. Po sprzedaniu 50 worków cukru, okazało się, że pozostała część waży 975 kilogramów. Ile kilogramów cukru dostarczono do magazynu?
7) Z naczynia o objętości 40 litrów napełnionego alkoholem odlano pewną ilość alkoholu i dodano wody. Gdy znowu odlano taką samą ilość mieszaniny i dopełniono naczynie wodą, w naczyniu pozostało 10 litrów alkoholu. Ile litrów cieczy odlano za każdym razem?
8) Trzej robotnicy, pracując po 8 godzin dziennie, wykonali w ciągu 6 dni 40% planowanej pracy. Ilu robotników wykona resztę tej pracy w ciągu 4 dni, pracując po 9 godzin dziennie?
9) O ile procent wzrośnie pole koła, jeżeli jego obwód zwiększymy o p%?
10) Basen można napełnić woda dwiema rurami w ciągu 6 godzin. Napełnianie basenu pierwsza rurą trwa o 5 godzin krócej, niż drugą. Ile godzin trwa napełnianie basenu każda rurą oddzielnie?

7. Zadania optymalizacyjne.
1) Na paraboli $y^2=4x$ znaleźć punkt leżący najbliżej prostej $y=2x+4$.

2) **Na kuli o promieniu R opisano stożek. Jaka będzie wysokość stożka o najmniejszej objętości?**
3) **W półokrąg promieniu R wpisano trapez, którego podstawą jest średnica okręgu. Dla jakiego kąta przy podstawie pole trapezu jest największe?**
4) **Wierzchołki podstawy prawidłowego ostrosłupa czworokątnego należą do powierzchni kuli o promieniu 3, a wierzchołek ostrosłupa jest środkiem kuli. Wyznaczyć długość krawędzi podstawy ostrosłupa tak, aby jego objętość była największa.**

8. **<u>Nietypowe równania i nierówności</u>**
1) $x^2 - 2\sqrt{2}x + y - 2\sqrt{y} + 3 = 0$
2) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 4x - 6y - 8z + 3 = 0$
3) $x + \sqrt[3]{x-5} = 7$
4) $2^{\sqrt{x}} = \sqrt{16^{\sqrt{x}}} - 2$
5) $(x-3)^{x^2-6x+8} = 1$
6) $\sqrt{x^x} = x^{\sqrt{x}}$
7) $\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} = 12$
8) $|x-1|^{x^4-4x^3+3x^2} < 1$
9) $x^{-\frac{2}{3}} \geq x^{-\frac{1}{3}}$
10) $\sqrt{2}x + \sqrt{3} > \sqrt{3}x - \sqrt{2}$

9. **<u>Główka pracuje - zadania wymagające myślenia...czyli TOP TRENDY nowej matury</u>**
1) **Wiadomo, że dla każdego x należącego do dziedziny funkcji $y = f(x)$ zachodzi warunek: $1 + f(x) + f^2(x) + ... = x^2 - 1$, gdzie lewa strona jest sumą zbieżnego szeregu geometrycznego. Wyznacz wzór tej funkcji i jej dziedzinę.**
2) **Wykaż, że jeśli równanie $x^2 + px + q = 0$ ma rozwiązanie, to wartość bezwzględna różnicy jego pierwiastków jest równa pierwiastkowi wyróżnika tego równania.**
3) **Bok kwadratu ABCD ma długość a. Wierzchołek A połączono ze środkami E i F odpowiednio boków BC i CD. Wykaż, że odcinki AE i AF dzielą przekątną BD na trzy odcinki o równej długości.**
4) **Wykaż, że jeżeli równanie postaci $x^3 + ax + b = 0$ ma pierwiastek podwójny, to $4a^3 + 27b^2 = 0$**
5) **Czy prawdziwe jest zdanie: $\bigvee_{a\in R} \bigwedge_{x\in R} x^2 + 4x + \left(\frac{1}{2}\right)^a > 0$?**
6) **Wszystkie liczby naturalne ustawione w porządku rosnącym podzielono na grupy: $(1),(2,3),(4,5,6),(7,8,9,10),\ldots$.Obliczyć sumę liczb występujących w n-tej grupie.**
7) **Iloczyn skalarny wektorów $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}$ jest równy polu równoległoboku o bokach AB i AC. Wyznaczyć miarę kąta BAC.**
8) **Wykazać, że jeżeli $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$, to co najmniej dwie spośród liczb a,b,c są liczbami przeciwnymi.**
9) **Wykazać, że jeżeli $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$, to $a = b = c$.**

10) Wykazać, że jeżeli $a+b=1$, to $a^4+b^4\geq\frac{1}{8}$ dla dowolnych liczb a i b.

11) Zbadaj liczbę pierwiastków równania $x^3-(m-2)x+2=0$ w zależności od parametru m.

12) Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]$

13) Oblicz sumę: $2005^2-2004^2+2003^2-2002^2+\ldots+3^2-2^2+1^2$

14) Udowodnij, że liczba a jest wielokrotnym pierwiastkiem wielomianu W(x) wtedy i tylko wtedy, gdy jest wspólnym miejscem zerowym wielomianu W(x) i jego pochodnej.

15) Pary (x,y) liczb całkowitych, spełniające równanie $x^3-x^2y+xy-y^2=5$ są współrzędnymi wierzchołków pewnego wielokąta wypukłego. Oblicz pole tego wielokąta.

16) Iloczyn trzech liczb pierwszych równa się ich pięciokrotnej sumie. Jakie to liczby?

17) Wyznacz wszystkie pary (x,y) liczb całkowitych spełniające układ równań $\begin{cases} x+y=6 \\ 2^x+3^y=25 \end{cases}$.

18) Liczby $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Znając sumy: $S=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ oraz $T=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}$ oblicz iloczyn $I=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n$

19) Wiedząc, że $\log_{98}56=p$ obliczyć $\log_7 14$.

20) Wyznaczyć resztę z dzielenia wielomianu $W(x)=x^{100}-2x^{99}+2x^{50}-1$ przez wielomian $G(x)=x^3-x$

10. <u>10 zadań związanych z granicą i pochodną funkcji</u>

1) Znajdź przedziały monotoniczności funkcji $f(x)=2x^3+\left|x^2-4\right|$, określonej dla $x\in(0,2)$.

2) Czy istnieje liczba $a\in R$, dla której funkcja dana wzorem $f(x)=\begin{cases} \frac{2x^2-8}{|x-2|} & \text{dla } x\neq 2 \\ a & \text{dla } x=2 \end{cases}$ jest ciągła w punkcie 2? Odpowiedź uzasadnij.

3) Styczna do wykresu funkcji danej wzorem $f(x)=2x^3-4x^2+5x-1$ jest równoległa do prostej o równaniu $y=3x$. Wyznacz współrzędne punktu styczności.

4) Wyznacz asymptoty wykresu funkcji danej wzorem $y=\frac{x^2}{x-2}$.

5) Wyznacz ekstrema funkcji danej wzorem $f(x)=\sqrt{x}-x$.

6) Przez punkt $A=(0,0)$ przechodzą dwie styczne do paraboli $y=x^2-4x+3$. Oblicz pole trójkąta ABC, gdzie B,C są punktami styczności.

7) Na kuli o promieniu R opisano stożek. Jaka musi być wysokość stożka, aby miał on najmniejszą objętość?

8) Wydajność pracy pewnego pracownika zmienia się w ciągu ośmiogodzinnego dnia pracy, i po t godzinach od jej rozpoczęcia osiąga wartość $w(t) = 50 + 9t - t^2 - \frac{1}{9}t^3$. O której godzinie jego wydajność jest największa, jeżeli rozpoczyna pracę o godzinie 8^{00}?

9) Wykaż, że równanie $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$ ma w przedziale $(0,1)$ dokładnie jeden pierwiastek.

10) Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji $y = 2\sin x + \sin 2x$ w przedziale $\left\langle 0, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$.

11. Co pisać w rozwiązaniu zadania?

1) Ze zbioru T liczb całkowitych spełniających równanie $2|x+3| - |x-1| = 5 + 3x$ losujemy bez zwracania liczby p,q,r i tworzymy funkcję $f: R \to R$ o wartości $f(x) = px^2 + qx + r$.

a) Podaj liczbę tak otrzymanych funkcji.

b) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

A – otrzymana funkcja jest parzysta

B - otrzymana funkcja jest różnowartościowa

C - otrzymana funkcja jest stała

12. Gdzie tu problem? Dobry wynik i błędne rozwiązanie?

1) Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = (4-m)x^2 - 3x + m + 4$ przyjmuje tylko wartości dodatnie?

2) Wiadomo, że $\cos x = -\frac{5}{13}$ i $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Oblicz $\sin x$.

3) Rozwiąż nierówność: $\sqrt{x^2 - 3} < x + 1$.

13. Jak podczas rozwiązywania zadania tworzyć plan poczynań?

1) Dla jakich wartości parametru m, każdy z dwóch różnych pierwiastków równania $x \;\; + mx + 4 = 0$ jest mniejszy od 4?

2) Wyznaczyć równanie stycznej do krzywej o równaniu $f(x) = 2x^2 + x - 4$, wiedząc, że styczna jest prostopadła do prostej o równaniu $-x + 3y + 2 = 0$.

3) W trójkącie równoramiennym o podstawie 10, dwusieczna kąta przy podstawie dzieli ramię na dwa odcinki, z których jeden, którego końcem jest wierzchołek trójkąta, jest o 3 większy od drugiego. Wyznacz długości promieni okręgów opisanych na powstałych trójkątach.

14. Styczna do wykresu funkcji.

1) Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 5$, prostopadłej do prostej o równaniu $x - 2y + 7 = 0$.

2) Dana jest funkcja $f(x) = x^3 + x$. Udowodnij, że dla dowolnego $x_0 \neq 0$, styczne do wykresu tej funkcji poprowadzone w punktach x_0 i $-x_0$ są prostymi równoległymi.

3) $f(x)=\frac{4}{x}$. Udowodnij, że pole trójkąta wyznaczonego przez punkty przecięcia dowolnej stycznej do wykresu funkcji z osiami układu współrzędnych, oraz punkt $S=(0,0)$ nie zależą od wyboru punktu styczności.
4) Znajdź równanie wspólnej stycznej do wykresów funkcji $f(x)=x^2+4x+8$ oraz $g(x)=x^2+8x+4$.
5) Dla jakich wartości $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ wykres funkcji $f(x)=x^3-x-\cos 2\alpha-\sin\alpha+3$ jest styczny do prostej $y=2x$?

15. <u>Jak odróżnić wariację z powtórzeniami od wariacji bez powtórzeń, kombinacji</u>?
1) W turnieju szachowym wystartowało 12 zawodników. Każdy z każdym rozgrywa dwie partie: mecz i rewanż. Ile partii zostanie rozegranych w całym turnieju?
2) Sześć osób wsiada do windy na parterze 10-piętrowego budynku. Przyjmując, że osoby te wysiadają losowo na poszczególnych piętrach, oblicz prawdopodobieństwo, że wszyscy wysiądą na różnych piętrach.
3) Ze zbioru liczb naturalnych trzycyfrowych losujemy bez zwracania dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo, że iloczyn wylosowanych liczb jest liczbą parzystą.
4) Ze zbioru $\{1,3,6,7,8,9\}$ losujemy ze zwracaniem cztery liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: dwukrotnie wylosowaliśmy liczbę parzystą.
5) Rzucamy jednocześnie: czworościenną kostką do gry z oczkami 1,2,4 i 6, oraz sześcienną kostką do gry, na której ściankach są następujące ilości oczek: 1,1,2,3,4,6. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: suma oczek na obu kostkach jest większa od 9.

16. <u>Zasada indukcji matematycznej. Dowody indukcyjne</u>.
1) Udowodnij, ze dla każdego naturalnego n liczba $4^n+15n-1$ jest podzielna przez 9.
2) Udowodnij, ze dla każdego $n\in N^+$ zachodzi: $4+10+16+...+(6n-2)=n(3n+1)$.
3) Udowodnij, że dla każdego $n\in N^+$ zachodzi:
$4+10+16+...+(6n+4)=(n+1)(3n+4)$
4) Dla jakich liczb naturalnych prawdziwa jest nierówność: $2^n>2n$? Sformułuj hipotezę i udowodnij ją indukcyjnie.
5) Ciąg (a_n) jest określony wzorem rekurencyjnym:
$$\begin{cases} a_1=A \\ a_2=2A \\ a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n \quad, n\in N \end{cases}$$
Wyznacz wzór na n-ty wyraz tego ciągu.