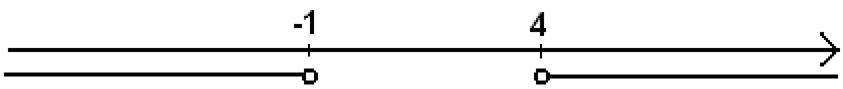
Tematy zadań – 2 razy 33 przykładowe zadania maturalne.

Matura podstawowa

1. Porównaj liczby: $\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{250}$ oraz $\sqrt[3]{1024}$.
2. W klasie jest 29 uczniów o średniej wieku 16 lat. Średnia wieku wzrośnie o rok, jeżeli doliczy się wiek wychowawcy. Ile lat ma wychowawca?
3. Uzasadnij, że różnica dowolnej liczby naturalnej dwucyfrowej i liczby powstałej po wpisaniu pomiędzy cyfrę dziesiątek i jedności tej liczby cyfry 0, jest podzielna przez 90.
4. Sprawdź, czy wartość wyrażenia
$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2003}+\sqrt{2004}}+\frac{1}{\sqrt{2004}+\sqrt{2005}}$$
jest większa od 2005.
5. W 20-osobowej grupie sportowców każdy trenuje siatkówkę lub koszykówkę. Oblicz, ile osób uprawia grę w kosza, jeżeli wiesz, że siatkówkę trenuje dwa razy mniej osób niż koszykówkę, a 4 osoby uprawiają oba te sporty.
6. Rozwiąż równanie: $\dfrac{\left[(0,5)^{-10}\cdot x+\left(\sqrt{2}\right)^{16}\right]\cdot 4^3}{8^{-\frac{2}{3}}}=16^4\cdot x$
7. Długość odcinka łączącego środki ramion trapezu jest średnią arytmetyczną długości jego podstaw; długość wysokości w trójkącie prostokątnym, poprowadzonej na przeciwprostokątną jest równa średniej geometrycznej długości odcinków, na jakie ta wysokość podzieliła przeciwprostokątną. Korzystając z powyższej informacji oraz danych przestawionych na rysunkach, oceń, na ogrodzenie której działki potrzeba więcej siatki.
8. Na osi liczbowej przedstawiono zbiór rozwiązań nierówności $|x+a|>b$.



   a) ile liczb pierwszych nie spełnia tej nierówności?
   b) wyznacz a oraz b
9. Uzasadnij, że jeśli w trzycyfrowej liczbie naturalnej cyfra środkowa jest sumą cyfr skrajnych, to liczba ta jest podzielna przez 11.
10. Podaj miejsca zerowe i zbiór wartości funkcji, która każdej liczbie całkowitej przyporządkowuje resztę z dzielenia tej liczby przez 5.
11. Firma chce kupić 20 fartuchów roboczych za kwotę nie większą niż 2500 złotych. Zamierza kupić fartuchy nylonowe w cenie 38 zł oraz brezentowe w cenie 150 zł. Jaką największą liczbę fartuchów brezentowych może kupić ta firma?
12. W prostokątnym układzie współrzędnych dany jest trapez prostokątny ABCD, o którym wiadomo, że $\overline{AB}\|\overline{DC}$, bok AD zawiera się w prostej o równaniu $x+3y+7=0$, $|\angle ABC|=90^0$, $B=(2,2)$ oraz $C=(3,0)$. Opisz tę figurę odpowiednim układem nierówności.
13. Liczba -7 jest miejscem zerowym wielomianu W(x). Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez wielomian $P(x)=x^2+5x-14$, jeżeli wiadomo, że w wyniku dzielenia wielomianu W(x) przez dwumian (x-2) otrzymujemy resztę 18.

14. Wiadomo, że dla różnych od zera liczb a i b zachodzi związek $\frac{10a+5b}{2a}=6$.
Wyznacz wartość wyrażenia $\frac{4a-3b}{7b}$.

15. Sprawdź, czy zbiór rozwiązań nierówności $\frac{x-3}{x+2}>1$ zawiera się w zbiorze rozwiązań nierówności $x^3-4x+2x^2-8\le 0$.

16. Udowodnij tożsamość: $\cos\alpha\cdot\sqrt{1+tg^2\alpha}=-1$, $\alpha\in\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$

17. Oblicz wartość wyrażenia: $tg11^0\cdot tg79^0-\left(\sin15^0+\sin75^0\right)^2+2\sin15^0\cos15^0$.

18. Oblicz wartość wyrażenia $\sin^3 x+\cos^3 x$, jeżeli wiadomo, że $\sin x+\cos x=\frac{2}{3}$.

19. Czy suma wszystkich czterocyfrowych liczb naturalnych, które są podzielne przez 41 jest większa od $1{,}2\cdot 10^6$?

20. Rozwiąż równanie: $86+82+78+74+...+\left(x^2+3x-2\right)=968$.

21. Dla jakich argumentów wielomian $W(x)=x^3+bx^2+cx+d$ przyjmuje wartości dodatnie, jeżeli wiadomo, że kolejne jego współczynniki są czterema kolejnymi wyrazami pewnego ciągu geometrycznego, i że liczba 2 jest pierwiastkiem tego wielomianu?

22. Wyznacz te wyrazy ciągu o wyrazie ogólnym $a_n=\frac{n^2+10}{n^2-3}$, które są liczbami całkowitymi.

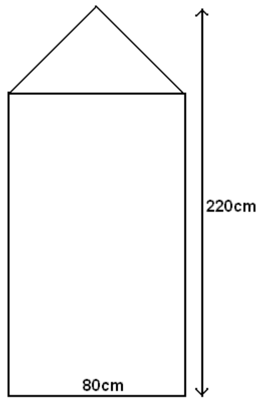
23. Dwie siły zaczepione w tym samym punkcie tworzą kąt o mierze 60^0 i mają wartość 10N. Wyznacz wartość wypadkowej tych sił.

24. Wyznacz zbiór punktów płaszczyzny określony następująco: $B=\left\{(2t+1,3-2t):t\in\left\langle -2,1\right\rangle\right\}$

25. Środkiem okręgu jest punkt $S=(-1,2)$, a styczna do okręgu ma równanie $3x+4y+5=0$. Oblicz długość promienia okręgu.

26. W przetwórni do wyprodukowania 10 słoików konfitur owocowych I rodzaju zużywa się 2kg śliwek i 3kg jabłek, zaś do wyprodukowania 10 słoików konfitur owocowych II rodzaju zużywa się 3kg śliwek i 1kg jabłek. Przywieziono 840kg śliwek i 560kg jabłek. Oblicz, ile słoików konfitur każdego rodzaju należy wyprodukować, aby osiągnąć największy zysk, jeżeli słoik konfitur I rodzaju kosztuje 4zł, a II rodzaju 2 zł.

27. Okno ma kształt prostokąta zakończonego na górze trójkątem równoramiennym (rysunek). Pole powierzchni okna wynosi 15200 cm^2. Wyznacz tangens kąta przy wierzchołku u szczytu okna.



28. Kropla deszczu ma średnicę 2mm. Oblicz, ile kropel deszczu zmieści się w puszce o promieniu podstawy 4cm i wysokości 15cm.
29. Grupa archeologów odkryła znalezisko, w którym odkopano naczynie z cennego kruszcu. Naczynie ma kształt walca, którego wysokość jest dwa razy większa od promienia podstawy. Aby zabezpieczyć eksponat, umieszczono go w szklanym, stożkowym naczyniu o wysokości 24cm i promieniu podstawy 8cm w ten sposób, że walec jest wpisany w stożek. Oblicz wymiary znalezionego naczynia.
30. W pudełku jest tyle samo losów wygrywających, co pustych. Losujemy jednocześnie dwa losy. Ile musi być losów każdego rodzaju, aby prawdopodobieństwo wylosowania przynajmniej jednego losu wygrywającego było większe od $\frac{19}{25}$?
31. 8 drużyn piłkarskich dzielimy losowo na dwie równoliczne grupy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dwie najsilniejsze z tych drużyn znajdą się w tej samej grupie?
32. W pudełku jest n losów, wśród których są 4 losy wygrywające. Losujemy dwa razy po jednym losie ze zwracaniem. Dla jakiego n prawdopodobieństwo, że wśród dwu wylosowanych losów będzie dokładnie jeden wygrywający jest mniejsze od 0,32?
33. Z pudełka, w którym jest jednakowa liczba kul białych i czarnych, losujemy trzy razy po jednej kuli, przy czym po każdym losowaniu wkładamy wylosowaną kulę z powrotem do pudełka i dokładamy jeszcze jedną kulę tego samego koloru, co wylosowana. Oblicz, ile jest kul w pudełku, jeśli wiadomo, ze prawdopodobieństwo wylosowania kul tego samego koloru jest równe $\frac{7}{22}$.

Matura rozszerzona

1. Udowodnij, że $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1$.
2. Oblicz wartość wyrażenia $x^2+\frac{1}{x^2}$, wiedząc, że $x+\frac{1}{x}=\sqrt{3}$.
3. Oblicz wartość wyrażenia $x^3+\frac{1}{x^3}$, wiedząc, że $x^2+\frac{1}{x^2}=14$.
4. Dane są zbiory: $A=\{x: x\in R \wedge x^2+|x|-2\geq 0\}$, $B=\{x: x\in R \wedge |x+2|<5\}$. Wyznacz zbiór $A\cap B$.
5. Korzystając z własności wartości bezwzględnej doprowadź wyrażenie: $\left||x-1|-3\right|\cdot\left||x-3|+3\right|\cdot\frac{1}{|x^2-2x-8|}$ do najprostszej postaci i podaj konieczne założenia.

6. Uzasadnij, że jeżeli dowolne liczby całkowite a oraz b przy dzieleniu przez 5 dają reszty odpowiednio równe 2 oraz 3, to reszta z dzielenia podwojonej sumy kwadratów tych liczb przez 10 wynosi 6.
7. Usuń niewymierność z mianownika ułamka: $\frac{1}{\sqrt{15}-\sqrt{6}+\sqrt{35}-\sqrt{14}}$.
8. Wyznacz zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, które spełniają formę zdaniową $|x-1|<2 \Rightarrow x>1$.
9. Wyznacz zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, które spełniają formę zdaniową $|x-1|<2 \Rightarrow x>1$.
10. Zbadaj na podstawie definicji, monotoniczność funkcji o wzorze $f(x)=-x^2+2x+5$ w przedziale $(-\infty,1)$.
11. Wykaż, że jeżeli funkcja $y=f(x)$, $x\in R$ jest nieparzysta, to funkcja $h(x)=x\cdot f(x)$, $x\in R$ jest parzysta.
12. Wykres funkcji o wzorze $f(x)=\sqrt{x}$ przesunięto o wektor $\vec{u}=[2,-1]$ a następnie otrzymany wykres przekształcono przez symetrię środkową względem punktu $(0,0)$. Napisz wzór funkcji, której wykres otrzymano.
13. Rozłóż wielomian $W(x)=5x^4+20$ na czynniki możliwie najniższego stopnia.
14. Z prostokątnego kawałka miedzianej blachy o wymiarach $0{,}5\text{m}\times 0{,}4\text{m}$ należy wyciąć na rogach jednakowe kwadraty tak, aby po złożeniu blachy i zalutowaniu odpowiednich krawędzi otrzymać prostopadłościenny pojemnik. Jakiej wielkości kwadraty należy wyciąć, aby objętość pojemnika była równa 6 litrów, a odpady były jak najmniejsze?
15. Wykaż, że nierówność $4x^4-12x^3+25x^2-48x+36\geq 0$ jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą.
16. Wyznacz najmniejszą wartość sumy czwartych potęg pierwiastków równania $x^2-x+m-2=0$ z parametrem m.
17. Zbadaj liczbę rozwiązań układu równań liniowych z parametrem $m\in R$:
$$\begin{cases}(m-1)x-2y=2\\ x+(m+2)y=1\end{cases}$$
18. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, w którym $a_3=\frac{\pi}{6}$, $a_7=\frac{5}{6}\pi$. Oblicz wartość wyrażenia: $tga_1+\sin a_6-\cos a_9$.
19. Dla jakich wartości parametru k równanie $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{2k+1}{k-1}$ ma rozwiązanie?
20. Rozwiąż równanie: $\cos x tg^2 x-3\cos x-\sin x tg^2 x+3\sin x=0$.
21. Ciąg (a_n) ma tę własność, że dla dowolnego $n\in N$, zachodzi: $S_n=3n(n-2)$. Wykaż, że jest to ciąg arytmetyczny.
22. Określmy ciąg następująco: $\begin{cases}a_1=1\\ a_n=\sqrt{a_{n-1}+1} \text{ dla } n>1\end{cases}$. Wykaż, że każdy wyraz tego ciągu (za wyjątkiem pierwszego), jest nie mniejszy od $\sqrt{2}$.
23. Oblicz granice:
a) $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+5}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!-n!}{(n+2)!-(n-1)!}$

24. O pewnym ciągu geometrycznym (a_n) wiadomo, że nie jest on ciągiem monotonicznym, oraz, że $a_1 \neq 0$, $a_1 = 16a_5$.

 Sprawdź, czy $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \geq \frac{11}{16} a_1$.

25. Dany jest ciąg geometryczny: $2^{x_1}, 2^{x_2}, 2^{x_3}, ...$ Znajdź jego piąty wyraz, jeżeli wiadomo, że $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{10} = -205$ oraz $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{20} = --910$.

26. W czworokącie wypukłym o polu P, połączono odcinkami środki kolejnych boków. W powstałym w ten sposób nowym czworokącie, znów połączono odcinkami środki kolejnych boków, w następnym zrobiono to samo, itd. Znajdź sumę pól wszystkich czworokątów, o których mowa w zadaniu.

27. Dla jakich wartości parametru p, iloczyn zbiorów A i B jest zbiorem pustym, jeżeli:
 $A = \{(x, y): x \in R , y \in R , x^2 + y^2 - 6x + 2y + 8 \leq 0\}$
 $B = \{(x, y): x \in R , y \in R , x - y + p = 0\}$

28. Dana jest funkcja o wzorze $f(x) = \log(x^5 - x^3)$.
 a) Określ dziedzinę funkcji.
 b) Wykaż, że dla $x = \sqrt{10}$ funkcja przyjmuje wartość większą, niż $\log 90$.

29. Wyznacz zbiór tych argumentów, dla których funkcja o wzorze $f(x) = 6^x + 5 \cdot 3^x$ osiąga wartości większe, niż funkcja $g(x) = 2^{x+2} + 20$.

30. Wyznacz te wartości a, dla których równanie $9^x + a = 3^{x+1}$ ma dwa różne rozwiązania.

31. Dla jakich wartości parametru $a \in R$, granica $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(a^2-1)x^2+1}{(a-1)x^2+x+2}$ jest równa 0?

32. Wykaż, ze styczna do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{(x+5)^3}$, $x \in R \setminus \{-5\}$, poprowadzona w dowolnym punkcie $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \neq -5$,jest wykresem pewnej funkcji malejącej w zbiorze R.

33. Niech f i g będą funkcjami rosnącymi w pewnym przedziale (a,b). Wykaż, ze funkcja $h(x) = f(x) + g(x)$, $x \in (a,b)$ jest funkcją rosnącą w tym przedziale.