

Tematy 55 różnych zadań
standardy wymagań: matury w latach 2008-2010
Poziom podstawowy.

1. 3 pkt.

Napisz równanie prostej, do której należy punkt $A = (4, -3)$ i która jest prostopadła do prostej $y = -2x + 5$.

2. 5 pkt.

Do wykresu funkcji liniowej należą punkty $A = (2, 1)$ i $B = (-2, 3)$. Oblicz pole trójkąta utworzonego przez wykres tej funkcji oraz osie układu współrzędnych.

3. 4 pkt.

Odcinek AB , gdzie $A = (-2, 4)$ i $B = (6, -2)$ jest podstawą trójkąta równoramiennego. Trzeci wierzchołek należy do osi OY . Wyznacz współrzędne tego wierzchołka.

4. 3 pkt.

Podstawy trapezu o długościach 5 i 7 zawierają się w prostych o równaniach:

$$x - 2y + 8 = 0 \text{ i } x - 2y + 7 = 0.$$

Oblicz pole trapezu.

5. 4 pkt.

Podaj równanie jednej z prostych, na której leży środek okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A = (1, 3)$, $B = (2, 7)$, $C = (3, 10)$.

6. 5 pkt.

Boki AB i AC trójkąta ABC zawarte są odpowiednio w prostych $x + y - 7 = 0$ i $x = 0$. Środek boku BC ma współrzędne $S = (2, 2)$. Wyznacz współrzędne wierzchołków B i C .

7. 3 pkt.

Napisz równanie osi symetrii trójkąta o wierzchołkach $A = (4, 1)$, $B = (7, 5)$, $C = (0, 4)$.

8. 4 pkt.

Długości boków trójkąta prostokątnego są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy 3. Oblicz długości tych boków.

9. 6 pkt.

Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - 4x + 3}$

10. 3 pkt.

Rozłóż na czynniki trójmian $y = 3x^2 - 7x - 6$.

11. 3 pkt.

Przedstaw w postaci kanonicznej trójmian kwadratowy $y = 2x^2 - 8x + 3$

12. 3 pkt.

Naszkicuj wykres funkcji $y = -2x^2 + 4x + 6$, wyznaczając dokładnie współrzędne punktów przecięcia z osiami układu współrzędnych oraz współrzędne wierzchołka paraboli.

13. 6 pkt.

Funkcja f określona jest wzorem: $f(x) = (x - 2)^2 - (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) - 5$.

- a) Sporządź wykres tej funkcji i wyznacz jej miejsca zerowe.
- b) Dla jakich wartości argumentów funkcja ta przyjmuje wartości nie mniejsze, niż 10?

14. 4 pkt.

Liczby 1 i 2 są miejscami zerowymi wielomianu $W(x) = x^3 - 6x^2 + ax + b$.
Wyznacz a i b .

15. 3 pkt.

Dla jakich argumentów funkcje $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} + 3$ i $g(x) = 5x$ osiągają tę samą wartość?

16. 4 pkt.

Wyznacz miejsca zerowe funkcji: $y = ||x + 6| - 12|$

17. 6 pkt.

Narysuj wykres funkcji $y = 1 + x + |1 - x|$, a następnie odczytaj z wykresu zbiór wartości tej funkcji.

18. 8 pkt.

Wykres funkcji $y = x^2 + bx + c$ przechodzi przez punkty $A = (-1, 0)$ i $B = (1, -4)$.

- a) Wyznacz b i c .
- b) Naszkicuj wykres funkcji.
- c) Odczytaj z wykresu, dla jakich x funkcja przyjmuje wartości ujemne, w jakich przedziałach maleje i jaki jest zbiór wartości funkcji.

d) Zapisz funkcję w postaciach: iloczynowej i kanonicznej.

e) Podaj równanie osi symetrii wykresu funkcji.

19. 5 pkt.

Koszt całkowity K w pewnym przedsiębiorstwie w czasie jednego dnia określa wzór:
 $K(x) = 0,2x^2 + 7x + 60$, gdzie x oznacza liczbę wyprodukowanych jednostek towaru.
Cena sprzedaży wynosi 15 złotych za jednostkę towaru.

a) Wyznacz przedział opłacalności produkcji, tzn. przedział, w którym zysk przedsiębiorstwa jest dodatni.

b) Podaj wielkość produkcji, dla której zysk przedsiębiorstwa jest największy.

20. 4 pkt.

Długości przekątnych rombu różnią się o 4cm. Pole tego rombu jest równe 30 cm^2 . Oblicz długości przekątnych.

21. 5 pkt.

Długości boków prostokąta o polu 160 cm^2 różnią się o 6 cm. Oblicz długość przekątnej tego prostokąta.

22. 4 pkt.

Jakie minimalne wymiary musi mieć działka budowlana w kształcie prostokąta, przylegająca z jednej strony do drogi, aby można było na niej wybudować dom o kwadratowej podstawie i wymiarach $12\text{ m} \times 12\text{ m}$, pamiętając, że zabudowa musi spełniać następujące warunki:

- minimalna odległość budynku od drogi – 6 m,
- minimalna odległość budynku od pozostałych granic działki – 4 m,

Ile zapłacimy za zakup tej działki, jeżeli 1 m^2 gruntu kosztuje 250 zł?

23. 4 pkt.

Trójkątną działkę o podstawie 99m i wysokości 88m zamieniono na działkę kwadratową o tym samym polu. Nową działkę ogrodzono. Oblicz długość ogrodzenia.

24. 7 pkt.

Dany jest kwadrat ABCD o boku a . Na przeciwległych bokach zbudowano trójkąty równoboczne ABN i CDM położone wewnątrz kwadratu. Oblicz pole części wspólnej tych trójkątów.

25. 6 pkt.

W trapezie równoramiennym o danym polu P połączono kolejno środki boków. Oblicz pole powstałego czworokąta.

26. 6 pkt.

Do dwóch okręgów o promieniach 2cm i 9cm poprowadzono wspólną styczną przecinającą odcinek łączący środki okręgów. Wiedząc, że odległość środków okręgów wynosi 22cm, oblicz długość odcinka stycznej zawartego między punktami styczności.

27. 5 pkt.

W prostokącie ABCD o bokach 5cm i 12cm poprowadzono przekątną AC. Wyznacz odległość punktu D od tej przekątnej.

28. 6 pkt.

Obwód prostokąta wynosi 160cm. Dwusieczna jednego z kątów dzieli obwód na dwie części różniące się o 40cm. Oblicz pole prostokąta.

29. 6 pkt.

Długości boków trójkąta prostokątnego o obwodzie 24 tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz długość wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną.

30. 6 pkt.

Przez punkty K i L , będące końcami średnicy pewnego okręgu poprowadzono dwie proste przecinające okrąg w punktach P i Q leżących po jednej stronie prostej KL . Wiadomo, że $|\sphericalangle PKL| = 60^{\circ}$, a punkt przecięcia prostych KP i QL jest odległy od punktów P i Q o 1. Oblicz długość promienia okręgu.

31. 5 pkt.

Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 6 i 12. Oblicz długość promienia okręgu stycznego do obu przyprostokątnych o środku należącym do przeciwprostokątnej.

32. 7 pkt.

W trójkącie rozwartokątnym największy bok ma długość 16cm, a spodki wysokości poprowadzonych z obydwu jego końców na pozostałe boki są odległe od wierzchołka kąta rozwartego o 2cm i 3cm. Oblicz długości pozostałych boków trójkąta.

33. 6 pkt.

W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 5cm i 12cm został wpisany okrąg. Oblicz długości części, na które przeciwprostokątna została podzielona przez punkt styczności z okręgiem.

34. 4 pkt.

Oblicz promień okręgu wpisanego w wycinek koła o kącie środkowym 60° i polu 6cm^2 .

35. 4 pkt.

Oblicz długości łuków okręgu o promieniu długości R , na które dzieli ten okrąg cięciwa odległa od środka okręgu o $\frac{R}{2}$.

36. 3 pkt.

W urnie znajduje się 1000 losów. Wśród nich są wygrane: dwie po 500 złotych, cztery po 250 złotych, sześć po 100 złotych i osiem po 50 złotych. Kupiono jeden los. Oblicz prawdopodobieństwo wygrania:

- a) nie więcej, niż 100 złotych,
- b) nie mniej, niż 250 złotych.

37. 4 pkt.

W urnie są 3 kule białe i 5 czarnych. Losujemy 3 razy po jednej kuli. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania trzech kul białych, gdy:

- a) losowanie odbywa się bez zwracania,
- b) losowanie odbywa się ze zwracaniem.

38. 5 pkt.

Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 2008\}$ losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo, że jest ona podzielna przez 2 lub przez 5.

39. 3 pkt.

Cena butów wynosiła 100zł. W czasie wyprzedaży cenę tę obniżono o 10%, a następnie jeszcze raz obniżono o 20%. Jaka jest ostateczna cena tych butów?

40. 6 pkt.

Ile kilogramów 15% wodnego roztworu soli kuchennej znajdowało się w naczyniu, jeżeli po odparowaniu 4kg wody, otrzymano 25% roztwór tej soli?

41. 4 pkt.

Rozwiąż układ równań:
$$\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = 9 \\ y = -3 \end{cases}$$

Określ dokładnie ilość rozwiązań i wymień wszystkie rozwiązania układu.

42. 7 pkt.

Wartość użytkowa maszyny maleje co roku o tą samą kwotę. Po ilu latach maszyna straci wartość użytkową, jeżeli jej wartość po 30 latach będzie cztery razy mniejsza, niż po 10 latach?

43. 3 pkt.

Pracownik zarabiający miesięcznie 1386 zł netto wydał 0,45 swego zarobku na utrzymanie, $\frac{2}{7}$ na opłaty stałe i $\frac{1}{9}$ na ubranie.

Ile pieniędzy zostało pracownikowi na inne wydatki?

44. 3 pkt.

Promień koła zwiększono trzykrotnie. Jak zmieniło się jego pole, a jak obwód? Odpowiedź uzasadnij.

45. 3 pkt.

Wiedząc, że $\frac{a}{a+b} = \frac{13}{27}$ oblicz $\frac{b}{a+b}$

46. 3 pkt.

Sprawdź, czy podana równość jest prawdziwa:

$$\frac{1}{7 + 4\sqrt{3}} + \frac{1}{7 - 4\sqrt{3}} = 14$$

47. 3 pkt.

Z 10 kg świeżych grzybów otrzymano 1 kg grzybów suszonych o zawartości 10% wody.

Ile procent wody zawierały świeże grzyby?

48. 5 pkt.

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym. Ile razy pole powierzchni bocznej stożka jest większe od pola jego podstawy? Czy pole podstawy, pole powierzchni bocznej i pole powierzchni całkowitej w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny? Jeśli tak – podaj jego różnicę.

49. 4 pkt.

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest dwa razy większe od jego pola podstawy. Oblicz kąt nachylenia wysokości ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

50. 5 pkt.

Namiot dziecięcy ma kształt stożka, którego przekrój osiowy jest trójkątem równobocznym o wysokości 1,5m. Ile trzeba kupić metrów bieżących wykładziny o szerokości 2m, aby zrobić z niej podłogę namiotu (bez sztukowania)?

Ile zapłacimy za tę wykładzinę, jeżeli cena $1m^2$ wykładziny wynosi 90 zł?

51. 5 pkt.

Dany jest stożek o promieniu podstawy 12cm i kącie nachylenia tworzącej do podstawy $\alpha = 30^0$.

- Oblicz miarę kąta rozwarcia stożka.
- Oblicz pole powierzchni i objętość stożka.

52. 5 pkt.

Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat o boku 4cm. Odcinek łączący środek jednej z podstaw prostopadłościanu z wierzchołkiem drugiej podstawy tworzy z krawędzią boczną kąt o mierze 30^0 . Oblicz objętość i pole powierzchni prostopadłościanu.

53. 5 pkt.

Punkt M leżący poza płaszczyzną wyznaczoną przez wierzchołki trójkąta równobocznego, jest odległy od każdego z tych wierzchołków o $\sqrt{13} \text{ cm}$, a od każdego z jego boków o 2 cm . Wyznacz odległość punktu M od płaszczyzny trójkąta równobocznego.

54. 4 pkt.

Zbadaj, czy istnieje taki kąt α , że $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ i $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

55. 4 pkt.

Sprawdź, czy podana równość jest tożsamością:

$$\left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}\right) \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha) = \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} + 2$$

