1. Wartość bezwzględna liczby

Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Liczba $|x|$ jest to odległość na osi liczbowej punktu x od punktu 0. W szczególności:

$$|x| \geq 0 \qquad\qquad |-x| = |x|$$

Dla dowolnych liczb x, y mamy:

$$|x+y| \leq |x| + |y| \qquad\qquad |x-y| \leq |x| + |y| \qquad\qquad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

Ponadto, jeśli $y \neq 0$, to $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

Dla dowolnych liczb a oraz $r \geq 0$ mamy warunki równoważne:

$$|x-a| \leq r \quad \Leftrightarrow \quad a-r \leq x \leq a+r$$

$$|x-a| \geq r \quad \Leftrightarrow \quad x \leq a-r \quad \text{lub} \quad x \geq a+r$$

2. Potęgi i pierwiastki

Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby a definiujemy jej n–tą potęgę:

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

Pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia n z liczby $a \geq 0$ nazywamy liczbę $b \geq 0$ taką, że $b^n = a$.

W szczególności, dla dowolnej liczby a zachodzi równość: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Jeżeli $a < 0$ oraz liczba n jest nieparzysta, to $\sqrt[n]{a}$ oznacza liczbę $b < 0$ taką, że $b^n = a$.
Pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

— * —

Niech m, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:

– dla $a \neq 0$: $\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad$ oraz $\quad a^0 = 1$

– dla $a \geq 0$: $\quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

– dla $a > 0$: $\quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

Niech r, s będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to zachodzą równości:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad\qquad \left(a^r\right)^s = a^{r \cdot s} \qquad\qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \qquad\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Jeżeli wykładniki r, s są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich liczb $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

3. Logarytmy

Niech $a>0$ i $a\neq 1$. Logarytmem $\log_a c$ liczby $c>0$ przy podstawie *a* nazywamy wykładnik *b* potęgi, do której należy podnieść podstawę *a*, aby otrzymać liczbę *c*:

$$\log_a c = b \Leftrightarrow a^b = c$$

Równoważnie:

$$a^{\log_a c} = c$$

Dla dowolnych liczb $x>0$, $y>0$ oraz r zachodzą wzory:

$$\log_a (x\cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a x^r = r\cdot \log_a x \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Wzór na zamianę podstawy logarytmu:
jeżeli $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$ oraz $c>0$, to

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

$\log x$ oraz $\lg x$ oznacza $\log_{10} x$.

4. Silnia. Współczynnik dwumianowy

Silnią liczby całkowitej dodatniej *n* nazywamy iloczyn kolejnych liczb całkowitych od 1 do *n* włącznie:

$$n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$$

Ponadto przyjmujemy umowę, że $0! = 1$.
Dla dowolnej liczby całkowitej $n\geq 0$ zachodzi związek:

$$(n+1)! = n!\cdot (n+1)$$

—— * ——

Dla liczb całkowitych *n*, *k* spełniających warunki $0\leq k\leq n$ definiujemy współczynnik dwumianowy $\binom{n}{k}$ (symbol Newtona):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Zachodzą równości:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1$$

5. Wzór dwumianowy Newtona

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej *n* oraz dla dowolnych liczb *a*, *b* mamy:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

6. Wzory skróconego mnożenia

Dla dowolnych liczb a, b:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dowolnych liczb a, b zachodzi wzór:

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + a^{n-k}b^{k-1} + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

W szczególności:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \qquad a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right) \qquad a^3 - 1 = (a-1)\left(a^2 + a + 1\right)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) \qquad a^3 + 1 = (a+1)\left(a^2 - a + 1\right)$$

$$a^n - 1 = (a-1)\left(1 + a + \ldots + a^{n-1}\right)$$

7. Ciągi

- <u>Ciąg arytmetyczny</u>

Wzór na n–ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego zachodzi związek:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla} \quad n \geq 2$$

- <u>Ciąg geometryczny</u>

Wzór na n–ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{dla} \quad n \geq 2$$

Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ początkowych n wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = \begin{cases} a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} & \text{dla} \quad q \neq 1 \\ n \cdot a_1 & \text{dla} \quad q = 1 \end{cases}$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu geometrycznego zachodzi związek:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \quad \text{dla} \quad n \geq 2$$

- <u>Procent składany</u>

Jeżeli kapitał początkowy K złożymy na n lat w banku, w którym oprocentowanie lokat wynosi $p\%$ w skali rocznej, to kapitał końcowy K_n wyraża się wzorem:

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

8. Funkcja kwadratowa

Postać ogólna funkcji kwadratowej: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $x \in R$.

Wzór każdej funkcji kwadratowej można doprowadzić do postaci kanonicznej:

$$f(x) = a(x-p)^2 + q, \quad \text{gdzie } p = -\frac{b}{2a},\ q = -\frac{\Delta}{4a},\ \Delta = b^2 - 4ac$$

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie o współrzędnych (p,q).
Ramiona paraboli skierowane są do góry, gdy $a > 0$, do dołu, gdy $a < 0$.

Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ (liczba pierwiastków trójmianu kwadratowego, liczba rzeczywistych rozwiązań równania $ax^2 + bx + c = 0$), zależy od wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$:

- jeżeli $\Delta < 0$, to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych (trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków rzeczywistych, równanie kwadratowe nie ma rozwiązań rzeczywistych),
- jeżeli $\Delta = 0$, to funkcja kwadratowa ma dokładnie jedno miejsce zerowe (trójmian kwadratowy ma jeden pierwiastek podwójny, równanie kwadratowe ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste): $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
- jeżeli $\Delta > 0$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe (trójmian kwadratowy ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania rzeczywiste):

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Jeśli $\Delta \geq 0$, to wzór funkcji kwadratowej można doprowadzić do postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$$

<u>Wzory Viéte'a</u>
Jeżeli $\Delta \geq 0$ to

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

9. Geometria analityczna

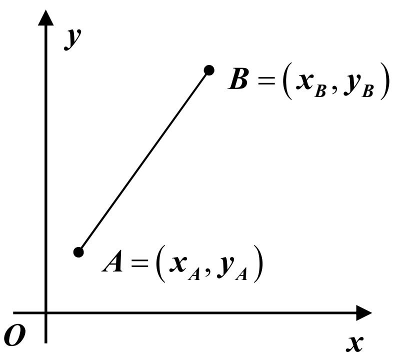
- <u>Odcinek</u>

Długość odcinka o końcach w punktach $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ dana jest wzorem:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Współrzędne środka odcinka AB:

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$



- Wektory

Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \left[x_B - x_A, y_B - y_A\right]$$

Jeżeli $\vec{u} = \left[u_1, u_2\right]$, $\vec{v} = \left[v_1, v_2\right]$ są wektorami, zaś a jest liczbą, to

$$\vec{u} + \vec{v} = \left[u_1 + v_1, u_2 + v_2\right] \qquad a \cdot \vec{u} = \left[a \cdot u_1, a \cdot u_2\right]$$

- Prosta

Równanie ogólne prostej:

$$Ax + By + C = 0,$$

gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$ (tj. współczynniki A, B nie są równocześnie równe 0).

Jeżeli $A = 0$, to prosta jest równoległa do osi *Ox*; jeżeli $B = 0$, to prosta jest równoległa do osi *Oy*; jeżeli $C = 0$, to prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych.

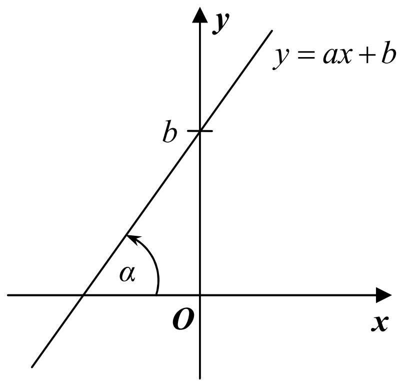
Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi *Oy*, to ma ona równanie kierunkowe:

$$y = ax + b$$

Liczba a to współczynnik kierunkowy prostej:

$$a = \mathrm{tg}\alpha$$

Współczynnik b wyznacza na osi *Oy* punkt, w którym dana prosta ją przecina.



Równanie kierunkowe prostej o współczynniku kierunkowym a, która przechodzi przez punkt $P = \left(x_0, y_0\right)$:

$$y = a\left(x - x_0\right) + y_0$$

Równanie prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = \left(x_A, y_A\right)$, $B = \left(x_B, y_B\right)$:

$$\left(y - y_A\right)\left(x_B - x_A\right) - \left(y_B - y_A\right)\left(x - x_A\right) = 0$$

- Prosta i punkt

Odległość punktu $P = \left(x_0, y_0\right)$ od prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$ jest dana wzorem:

$$\frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- Para prostych

Dwie proste o równaniach kierunkowych

$$y = a_1 x + b_1 \qquad y = a_2 x + b_2$$

spełniają jeden z następujących warunków:

- są równoległe, gdy $a_1 = a_2$
- są prostopadłe, gdy $a_1 a_2 = -1$
- tworzą kąt ostry φ i $\mathrm{tg}\varphi = \left|\frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2}\right|$

Dwie proste o równaniach ogólnych:

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \qquad A_2x+B_2y+C_2=0$$

- są równoległe, gdy $A_1B_2-A_2B_1=0$
- są prostopadłe, gdy $A_1A_2+B_1B_2=0$
- tworzą kąt ostry φ i $\operatorname{tg}\varphi=\left|\dfrac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}\right|$

- Trójkąt

Pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A=(x_A,y_A)$, $B=(x_B,y_B)$, $C=(x_C,y_C)$, jest dane wzorem:

$$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|(x_B-x_A)(y_C-y_A)-(y_B-y_A)(x_C-x_A)\right|$$

Środek ciężkości trójkąta ABC, czyli punkt przecięcia jego środkowych, ma współrzędne:

$$\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$$

- Przekształcenia geometryczne
  - przesunięcie o wektor $\vec{u}=[a,b]$ przekształca punkt $A=(x,y)$ na punkt $A'=(x+a,y+b)$
  - symetria względem osi Ox przekształca punkt $A=(x,y)$ na punkt $A'=(x,-y)$
  - symetria względem osi Oy przekształca punkt $A=(x,y)$ na punkt $A'=(-x,y)$
  - symetria względem punktu (a,b) przekształca punkt $A=(x,y)$ na punkt $A'=(2a-x,2b-y)$
  - jednokładność o środku w punkcie $(0,0)$ i skali $s\neq 0$ przekształca punkt $A=(x,y)$ na punkt $A'=(sx,sy)$

- Równanie okręgu

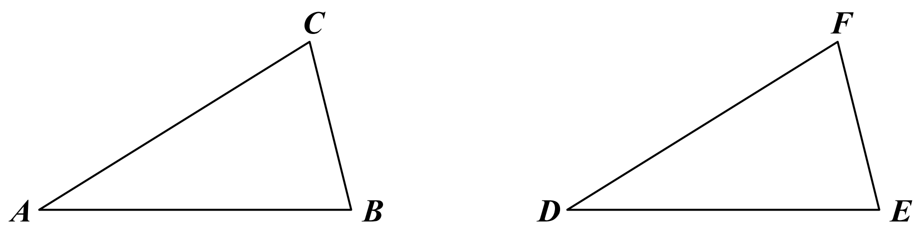
Równanie okręgu o środku w punkcie $S=(a,b)$ i promieniu $r>0$:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

lub $\quad x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \quad$ gdy $r^2=a^2+b^2-c>0$

10. Planimetria

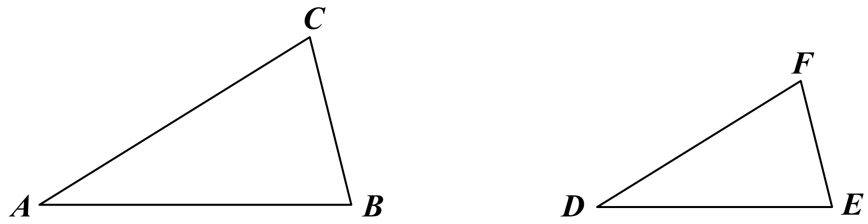
- Cechy przystawania trójkątów



To, że dwa trójkąty ABC i DEF są przystające ($\Delta ABC \equiv \Delta DEF$), możemy stwierdzić na podstawie każdej z następujących **cech przystawania trójkątów**:

– cecha przystawania „bok – bok – bok”:
  odpowiadające sobie boki obu trójkątów mają te same długości: $|AB| = |DE|$, $|AC| = |DF|$, $|BC| = |EF|$
– cecha przystawania „bok – kąt – bok”:
  dwa boki jednego trójkąta są równe odpowiadającym im bokom drugiego trójkąta oraz kąt zawarty między tymi bokami jednego trójkąta ma taką samą miarę jak odpowiadający mu kąt drugiego trójkąta, np. $|AB| = |DE|$, $|AC| = |DF|$, $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$
– cecha przystawania „kąt – bok – kąt”:
  jeden bok jednego trójkąta ma tę samą długość, co odpowiadający mu bok drugiego trójkąta oraz miary odpowiadających sobie kątów obu trójkątów, przyległych do boku, są równe, np. $|AB| = |DE|$, $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$, $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|$

- Cechy podobieństwa trójkątów

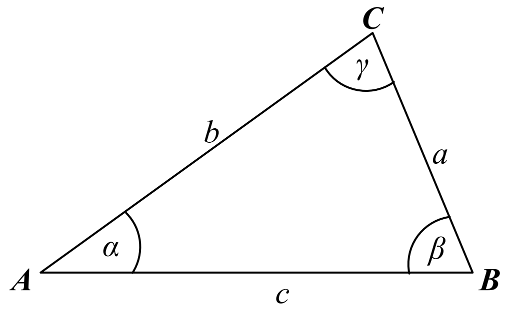


To, że dwa trójkąty ABC i DEF są podobne ($\Delta ABC \sim \Delta DEF$), możemy stwierdzić na podstawie każdej z następujących **cech podobieństwa trójkątów**:

– cecha podobieństwa „bok – bok – bok”:
  długości boków jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich długości boków drugiego trójkąta, np. $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|}$

– cecha podobieństwa „bok – kąt – bok”:
  długości dwóch boków jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich długości dwóch boków drugiego trójkąta i kąty między tymi parami boków są przystające, np. $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|}$, $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$

– cecha podobieństwa „kąt – kąt – kąt”:
  dwa kąty jednego trójkąta są przystające do odpowiednich dwóch kątów drugiego trójkąta (więc też i trzecie kąty obu trójkątów są przystające): $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$, $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|$, $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DFE|$



Przyjmujemy oznaczenia w trójkącie *ABC*:

a, *b*, *c* – długości boków, leżących odpowiednio naprzeciwko wierzchołków *A*, *B*, *C*

$2p = a + b + c$ – obwód trójkąta

α, β, γ – miary kątów przy wierzchołkach *A*, *B*, *C*

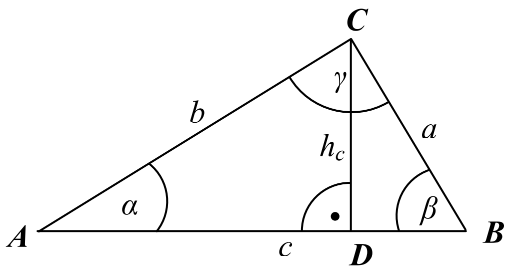
h_a, h_b, h_c – wysokości opuszczone z wierzchołków *A*, *B*, *C*

R, *r* – promienie okręgów opisanego i wpisanego

- Twierdzenie Pitagorasa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

W trójkącie *ABC* kąt γ jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 = c^2$.

- Związki miarowe w trójkącie prostokątnym



Załóżmy, że kąt γ jest prosty. Wówczas:

$$h_c^2 = |AD| \cdot |DB|$$

$$h_c = \frac{ab}{c}$$

$$a = c \cdot \sin\alpha = c \cdot \cos\beta$$

$$a = b \cdot \mathrm{tg}\alpha = b \cdot \frac{1}{\mathrm{tg}\beta}$$

$$R = \frac{1}{2}c \qquad r = \frac{a+b-c}{2} = p - c$$

- Twierdzenie sinusów

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

- Twierdzenie cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

- Wzory na pole trójkąta

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} = 2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R} = rp = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

- Trójkąt równoboczny

a – długość boku

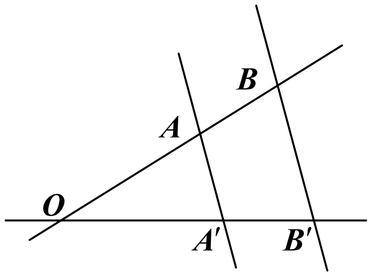
h – wysokość trójkąta

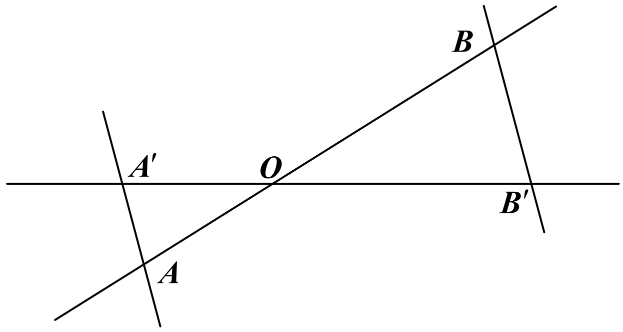
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

- <u>Twierdzenie Talesa</u>

Jeżeli proste równoległe AA' i BB' przecinają dwie proste, które przecinają się w punkcie O, to
$$\frac{|OA|}{|OA'|}=\frac{|OB|}{|OB'|}.$$

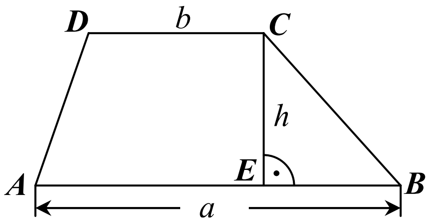




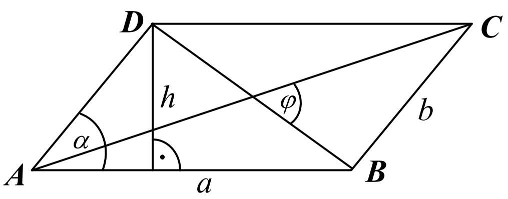
- <u>Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa</u>

Jeżeli proste AA' i BB' przecinają dwie proste, które przecinają się w punkcie O oraz $\frac{|OA|}{|OA'|}=\frac{|OB|}{|OB'|}$, to proste AA' i BB' są równoległe.

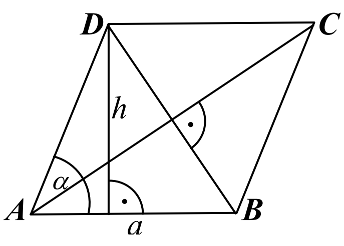
- <u>Czworokąty</u>



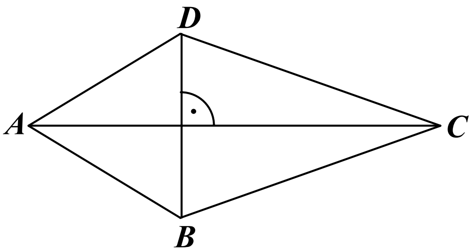
Trapez
Czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.
Wzór na pole trapezu:
$$P=\frac{a+b}{2}\cdot h$$



Równoległobok
Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.
Wzory na pole równoległoboku:
$$P=ah=a\cdot b\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD|\cdot\sin\varphi$$

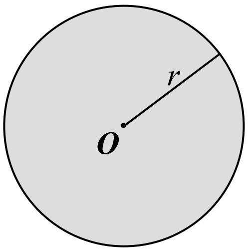


Romb
Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych jednakowej długości.
Wzory na pole rombu:
$$P=ah=a^2\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD|$$



Deltoid
Czworokąt, który ma oś symetrii, zawierającą jedną z przekątnych.
Wzór na pole deltoidu:
$$P=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD|$$

- Koło



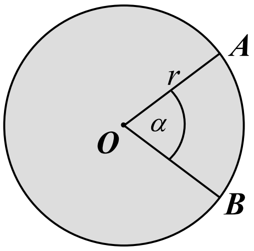
Wzór na pole koła o promieniu r:

$$P = \pi r^2$$

Obwód koła o promieniu r:

$$Ob = 2\pi r$$

- Wycinek koła

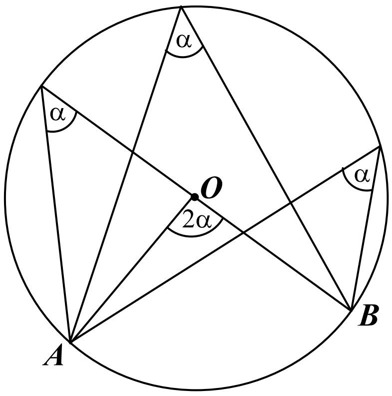


Wzór na pole wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach:

$$P = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

Długość łuku wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach: $l = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$

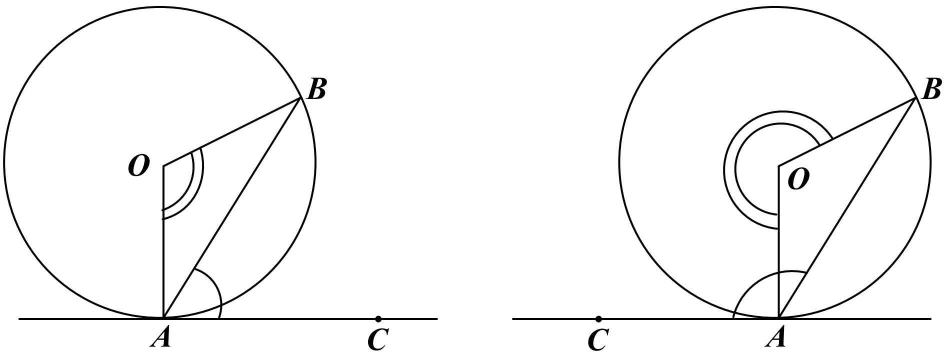
- Kąty w okręgu



Miara kąta wpisanego w okrąg jest równa połowie miary kąta środkowego, opartego na tym samym łuku.

Miary kątów wpisanych w okrąg, opartych na tym samym łuku, są równe.

- Twierdzenie o kącie między styczną i cięciwą

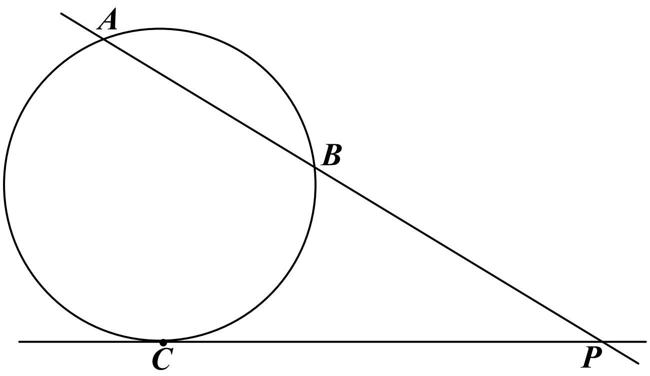


Dany jest okrąg o środku w punkcie O i jego cięciwa AB. Prosta AC jest styczna do tego okręgu w punkcie A. Wtedy $|\sphericalangle AOB| = 2 \cdot |\sphericalangle CAB|$, przy czym wybieramy ten z kątów środkowych AOB, który jest oparty na łuku znajdującym się wewnątrz kąta CAB.

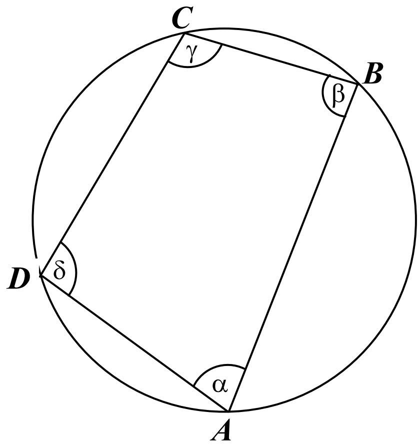
- <u>Twierdzenie o odcinkach siecznej i stycznej</u>

Dane są: prosta przecinająca okrąg w punktach A i B oraz prosta styczna do tego okręgu w punkcie C. Jeżeli proste te przecinają się w punkcie P, to

$$|PA|\cdot|PB|=|PC|^2$$



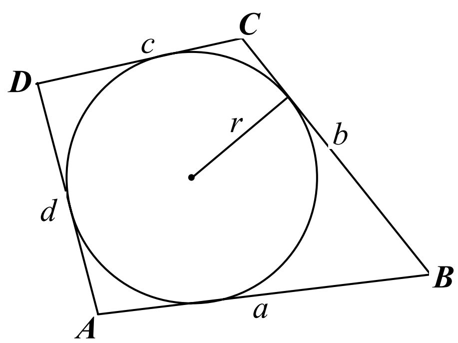
- <u>Okrąg opisany na czworokącie</u>



Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe 180°:

$$\alpha+\gamma=\beta+\delta=180^\circ$$

- <u>Okrąg wpisany w czworokąt</u>

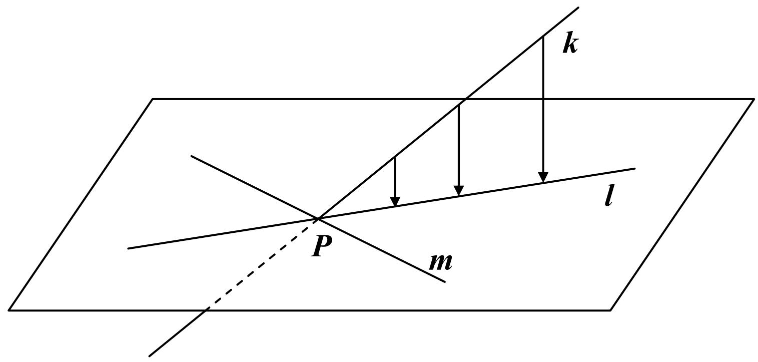


W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe:

$$a+c=b+d$$

11. Stereometria

- Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych

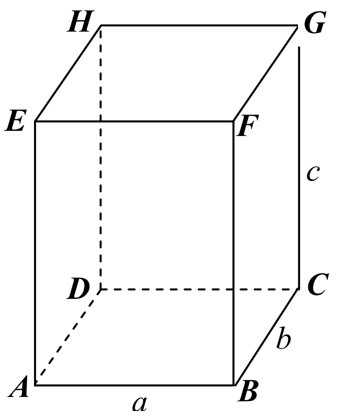


Prosta k przebija płaszczyznę w punkcie P. Prosta l jest rzutem prostokątnym prostej k na tę płaszczyznę. Prosta m leży na tej płaszczyźnie i przechodzi przez punkt P.
Wówczas prosta m jest prostopadła do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do prostej l.

- Oznaczenia

P – pole powierzchni całkowitej
P_p – pole powierzchni podstawy
P_b – pole powierzchni bocznej
V – objętość

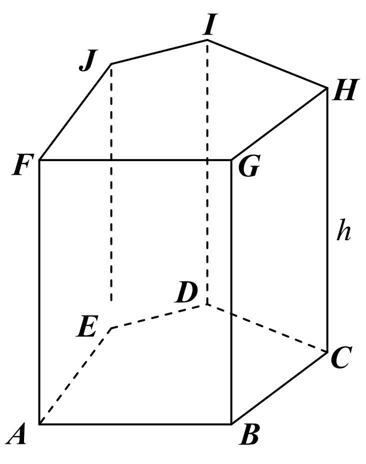
- Prostopadłościan



$$P = 2(ab + bc + ac)$$
$$V = abc$$

gdzie a, b, c są długościami krawędzi prostopadłościanu

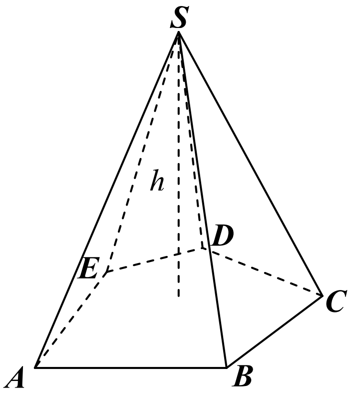
- Graniastosłup prosty



$$P_b = 2p \cdot h$$
$$V = P_p \cdot h$$

gdzie $2p$ jest obwodem podstawy graniastosłupa

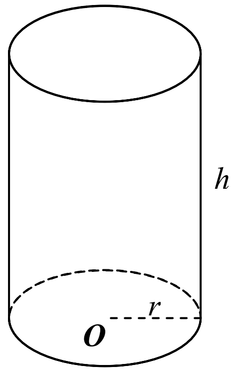
- Ostrosłup



$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$$

gdzie h jest wysokością ostrosłupa

- Walec



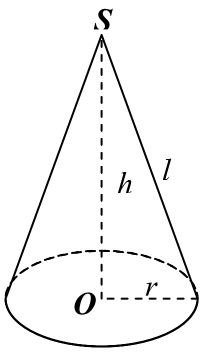
$$P_b = 2\pi rh$$

$$P = 2\pi r\left(r + h\right)$$

$$V = \pi r^2 h$$

gdzie r jest promieniem podstawy,
h wysokością walca

- Stożek



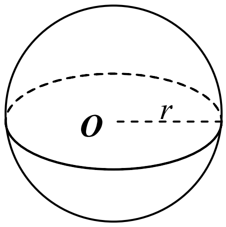
$$P_b = \pi rl$$

$$P = \pi r\left(r + l\right)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

gdzie r jest promieniem podstawy,
h wysokością, l długością tworzącej stożka

- Kula



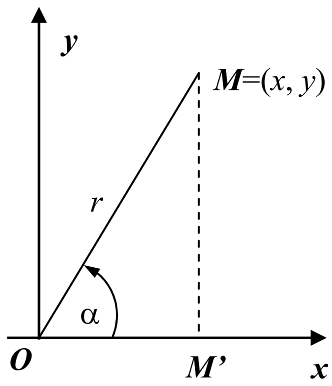
$$P = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

gdzie r jest promieniem kuli

12. TRYGONOMETRIA

- <u>Definicje funkcji trygonometrycznych</u>



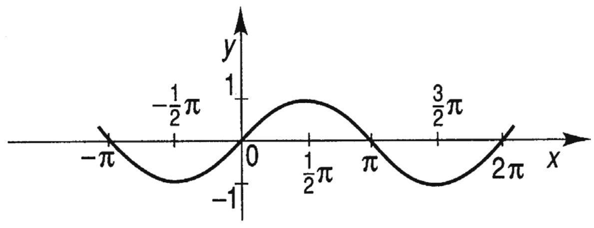
$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

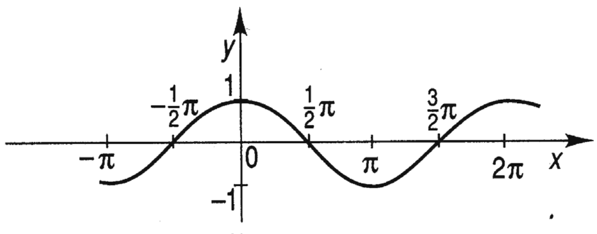
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \text{ gdy } x \neq 0$$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ jest promieniem wodzącym punktu M

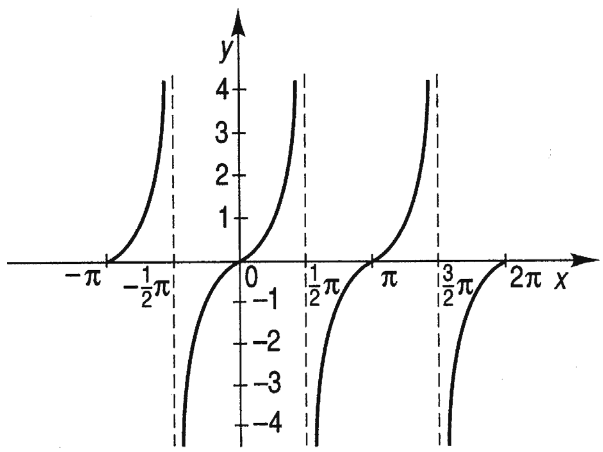
- <u>Wykresy funkcji trygonometrycznych</u>



$y = \sin x$



$y = \cos x$



$y = \mathrm{tg}\, x$

- <u>Związki między funkcjami tego samego kąta</u>

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{dla} \qquad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k - \text{całkowite}$$

- <u>Niektóre wartości funkcji trygonometrycznych</u>

α	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
	0	$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

- Funkcje sumy i różnicy kątów

Dla dowolnych kątów α, β zachodzą równości:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

Ponadto mamy równości:

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta} \qquad \mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$$

które zachodzą zawsze, gdy są określone i mianownik prawej strony nie jest zerem.

- Funkcje podwojonego kąta

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

13. Kombinatoryka

- Wariacje z powtórzeniami

Liczba sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z k niekoniecznie różnych wyrazów, jest równa n^k.

- Wariacje bez powtórzeń

Liczba sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z k ($1\le k\le n$) różnych wyrazów, jest równa

$$n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

- Permutacje

Liczba sposobów, na które $n\ge 1$ różnych elementów można ustawić w ciąg, jest równa $n!$.

- Kombinacje

Liczba sposobów, na które spośród n różnych elementów można wybrać k ($0\le k\le n$) elementów, jest równa $\binom{n}{k}$.

14. Rachunek prawdopodobieństwa

- Własności prawdopodobieństwa

$0\le P(A)\le 1$ dla każdego zdarzenia $A\subset\Omega$

$P(\Omega)=1$ $\quad\Omega$ – zdarzenie pewne

$P(\varnothing)=0$ $\quad\varnothing$ – zdarzenie niemożliwe (pusty podzbiór Ω)

$P(A)\le P(B)$ gdy $A\subset B\subset\Omega$

$P(A')=1-P(A)$, gdzie A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia A

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, dla dowolnych zdarzeń $A, B\subset\Omega$

$P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$, dla dowolnych zdarzeń $A, B\subset\Omega$

- Twierdzenie: Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych. Jeżeli wszystkie zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zdarzenia $A \subset \Omega$ jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

gdzie $|A|$ oznacza liczbę elementów zbioru A, zaś $|\Omega|$ – liczbę elementów zbioru Ω.

15. PARAMETRY DANYCH STATYSTYCZNYCH

- Średnia arytmetyczna

Średnia arytmetyczna n liczb $a_1, a_2, ..., a_n$ jest równa:

$$\overline{a} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

- Średnia ważona

Średnia ważona n liczb $a_1, a_2, ..., a_n$, którym przypisano odpowiednio dodatnie wagi $w_1, w_2, ..., w_n$ jest równa:

$$\frac{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + ... + w_n \cdot a_n}{w_1 + w_2 + ... + w_n}$$

- Średnia geometryczna

Średnia geometryczna n nieujemnych liczb $a_1, a_2, ..., a_n$ jest równa:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$$

- Mediana

Medianą uporządkowanego w kolejności niemalejącej zbioru n danych liczbowych $a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le a_n$ jest:

- dla n nieparzystych: $a_{\frac{n+1}{2}}$ (środkowy wyraz ciągu)
- dla n parzystych: $\frac{1}{2}\left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right)$ (średnia arytmetyczna środkowych wyrazów ciągu)

- Wariancja i odchylenie standardowe

Wariancją n danych liczbowych $a_1, a_2, ..., a_n$ o średniej arytmetycznej $\overline{a}$ jest liczba:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1 - \overline{a})^2 + (a_2 - \overline{a})^2 + ... + (a_n - \overline{a})^2}{n} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n} - (\overline{a})^2$$

Odchylenie standardowe σ jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji.