

Geometria analityczna: zadania o stycznej do okręgu

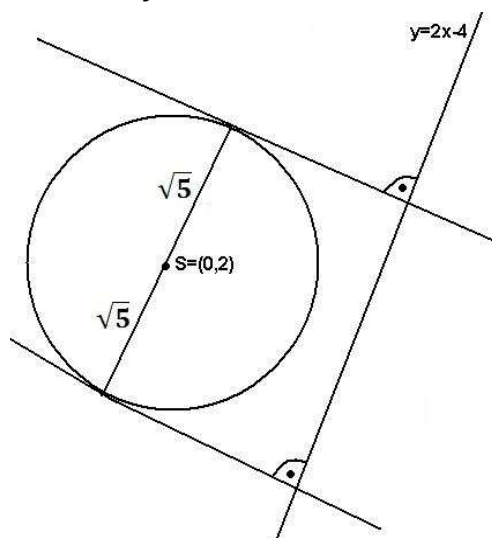
We wszystkich zadaniach o stycznej do okręgu polecamy wykorzystywanie wzoru na odległość punktu od prostej danej równaniem ogólnym.

W większości przypadków daje to rozwiązanie kosztem najmniejszej ilości obliczeń.

Rozwiążemy dwa przykładowe zadania.

➔ Zadanie 1

Wyznacz równania stycznych do okręgu $x^2 + (y - 2)^2 = 5$ i prostopadłych do prostej o równaniu $y = 2x - 4$.



Styczne są prostopadłe do prostej $y = 2x - 4$, dlatego mają równania:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}x + b \\ 2y &= -x + 2b \\ x + 2y - 2b &= 0 \end{aligned}$$

Odległość środka okręgu $S = (0, 2)$ od stycznej wynosi $\sqrt{5}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{5} &= \frac{|0 + 2 \cdot 2 - 2b|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \\ \sqrt{5} &= \frac{|4 - 2b|}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$|4 - 2b| = 5$$

$$4 - 2b = 5 \quad \text{lub} \quad 4 - 2b = -5$$

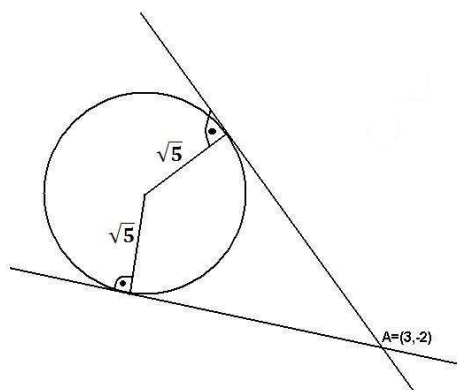
$$b = -\frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad b = \frac{9}{2}$$

Równania stycznych:

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$$

➔ Zadanie 2

Wyznacz równania stycznych do okręgu $x^2 + (y - 2)^2 = 5$ i przechodzących przez punkt $A = (3, -2)$.



Styczne o równaniach $y = ax + b$ przechodzą przez punkt $A = (3, -2)$, dlatego:

$$-2 = 3a + b \quad \Leftrightarrow \quad b = -3a - 2$$

Równania stycznych:

$$\begin{aligned} y &= ax - 3a - 2 \\ ax - y - 3a - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Odległość środka okręgu $S = (0, 2)$ od stycznej $ax - y - 3a - 2 = 0$ wynosi $\sqrt{5}$:

$$\sqrt{5} = \frac{|a \cdot 0 - 2 - 3a - 2|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}}$$

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2 + 1} = |-3a - 4|$$

$$5(a^2 + 1) = 9a^2 + 24a + 16$$

$$5a^2 + 5 = 9a^2 + 24a + 16$$

$$4a^2 + 24a + 11 = 0$$

$$\Delta = 576 - 16 \cdot 11 = 576 - 176 = 400$$

$$a_1 = \frac{-24 - 20}{8} = -\frac{44}{8} = -\frac{11}{2}, \quad a_2 = \frac{-24 + 20}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Równania stycznych:

$$-\frac{11}{2}x - y - 3 \cdot \left(-\frac{11}{2}\right) - 2 = 0 \quad \text{lub} \quad -\frac{1}{2}x - y - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = 0$$

$$11x + 2y - 33 + 4 = 0 \quad \text{lub} \quad x + 2y - 3 + 4 = 0$$

$$11x + 2y - 29 = 0 \quad \text{lub} \quad x + 2y + 1 = 0$$