Przykładowe zadania maturalne z informatora maturalnego.
Matura podstawowa od 2010 r.
Część 4

Zdający posiada umiejętności w zakresie:

POZIOM PODSTAWOWY	POZIOM ROZSZERZONY
4) użycia i tworzenia strategii:	
stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania	tworzy strategię rozwiązywania problemu
Zdający potrafi: • dobrać odpowiedni algorytm do wskazanej sytuacji problemowej • ustalić zależności między podanymi informacjami • zaplanować kolejność wykonywania czynności, wprost wynikających z treści zadania, lecz nie mieszczących się w ramach rutynowego algorytmu • krytycznie ocenić otrzymane wyniki	Zdający potrafi wszystko to, co na poziomie podstawowym oraz: • zaplanować i wykonać ciąg czynności prowadzący do rozwiązania problemu, nie wynikający wprost z treści zadania

1. Podaj przykład liczb całkowitych dodatnich a i b, spełniających nierówność $\frac{5}{7} < \frac{a}{b} < \frac{6}{7}$

****

Rozwiązanie

$$\frac{5}{7} < \frac{a}{b} < \frac{6}{7}, \quad a, b \in C_+$$

Wiadomo, że $\frac{5}{7} < \frac{5{,}5}{7} < \frac{6}{7}$

$$\frac{5 \cdot 2}{7 \cdot 2} < \frac{5,5 \cdot 2}{7 \cdot 2} < \frac{6 \cdot 2}{7 \cdot 2}$$

$$\frac{10}{14} < \frac{11}{14} < \frac{12}{14}$$

Rozwiązanie: $a = 11, b = 14$

****

****

2. Stosując wzory skróconego mnożenia rozłóż na czynniki wyrażenie $1 - a^2 + 2ab - b^2$

****

Rozwiązanie

$$1 - a^2 + 2ab - b^2 = 1 - (a^2 - 2ab + b^2) = 1^2 - (a - b)^2 =$$
$$= [1 - (a - b)] \cdot [1 + (a - b)] = [1 - a + b] \cdot [1 + a - b]$$

****

****

3. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_3 = 4$, $a_6 = 19$. Wyznacz wszystkie wartości n, dla których wyrazy ciągu (a_n) są mniejsze od 200.

****

Rozwiązanie

(a_n) - ciąg arytmetyczny

$a_3 = 4, \qquad a_6 = 19$

Należy obliczyć, dla jakich $n \in N$: $a_n < 200$

r -różnica ciągu

$a_3 + 3r = a_6$
$4 + 3r = 19$
$3r = 15$
$r = 5$

$a_1 + 2r = a_3$
$a_1 + 10 = 4$
$a_1 = -6$

$a_n = a_1 + (n-1)r$
$a_n = -6 + (n-1) \cdot 5$
$a_n = -6 + 5n - 5$
$a_n = 5n - 11$

$a_n < 200$
$5n - 11 < 200$
$5n < 211$
$n < 42{,}2$
Po uwzględnieniu warunku $n \in N$ otrzymujemy rozwiązanie zadania – zbiór numerów tych wyrazów ciągu, które są mniejsze od 200: $n \in \{1, 2, 3, \dots, 42\}$.
****
****
**4. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek: $\log_4 c = \log_3 b = \log_2 \quad = 2$.
Oblicz $\sqrt{abc}$.**
****
Rozwiązanie
$\log_4 c = \log_3 b = \log_2 a = 2 \quad , \quad a, b, c \in R_+$

$\log_4 c = 2$, czyli $c = 4^2 = 16$
$\log_3 b = 2$, czyli $b = 3^2 = 9$
$\log_2 a = 2$, czyli $a = 2^2 = 4$

$\sqrt{abc} = \sqrt{16 \cdot 9 \cdot 4} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$
****
****
5. Ile punktów wspólnych ma okrąg o równaniu $x^2 + (y-3)^2 = 6$ z prostą o równaniu $3x + y - 15 = 0$?
****
Rozwiązanie

METODA I

Okrąg ma z prostą tyle punktów wspólnych, ile rozwiązań ma układ równań:
$$\begin{cases} 3x + y - 15 = 0 \\ x^2 + (y-3)^2 = 6 \end{cases}$$

$y = 15 - 3x$

$x^2 + (15 - 3x - 3)^2 = 6$
$x^2 + (12 - 3x)^2 = 6$

$\boldsymbol{x^2 + 144 - 72x + 9x^2 - 6 = 0}$
$\boldsymbol{10x^2 - 72x + 138 = 0}$
$\boldsymbol{5x^2 - 36x + 69 = 0}$
$\boldsymbol{\Delta = 36^2 - 4 \cdot 5 \cdot 69 = 1296 - 1380 < 0}$

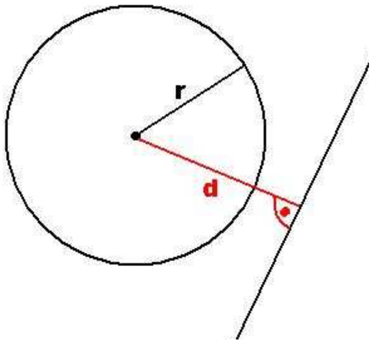
Równanie nie ma rozwiązania, a więc i układ równań nie ma rozwiązań.
Prosta i okrąg nie mają punktów wspólnych.

METODA II

$\boldsymbol{x^2 + (y-3)^2 = 6 \quad , \quad 3x + y - 15 = 0}$
Środek okręgu: $\boldsymbol{S = (0,3)}$**, promień:** $\boldsymbol{r = \sqrt{6}}$
Liczymy odległość punktu S od prostej $\boldsymbol{3x + y - 15 = 0}$ **(używamy wzoru na odległość punktu od prostej danej równaniem ogólnym):**

$$d = \frac{|3 \cdot 0 + 3 - 15|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|-12|}{\sqrt{10}} = \frac{12}{\sqrt{10}} = \frac{12\sqrt{10}}{10} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$$

$d \cong 3{,}8 \; , \; r = \sqrt{6} \cong 2{,}45 \; , \; d > r$



Prosta i okrąg nie mają punktów wspólnych.

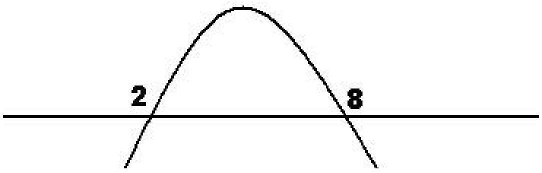
****
****

6. Zbiorem wartości funkcji kwadratowej g jest przedział $(-\infty, 5\rangle$, a zbiorem rozwiązań nierówności $g(x) > 0$ jest przedział $(2,8)$. Wyznacz wzór funkcji g.

****

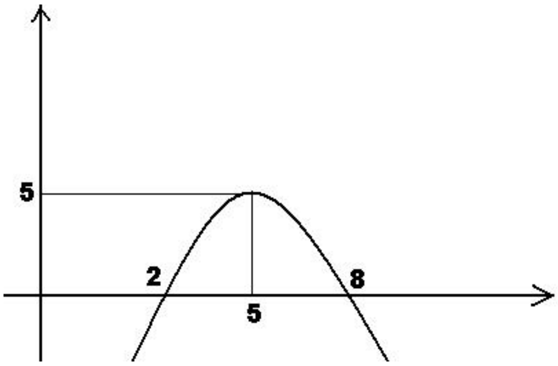
Rozwiązanie

Rozwiązaniem nierówności $g(x) > 0$ **jest przedział** $(2,8)$**, czyli wykres funkcji** g **jest następujący:**



Wynika z tego, że miejscami zerowymi funkcji $g(x)$ są 2 i 8, oraz współczynnik a jest ujemny. Postać iloczynowa funkcji g:
$g(x) = a(x-2)(x-8)$

Zbiorem wartości funkcji g jest przedział $(-\infty, 5\rangle$:



Z rysunku wynika, że do wykresu funkcji Należy punkt $(5,5)$.
Wstawiamy współrzędne tego punktu do równania funkcji:

$$5 = a(5-2)(5-8)$$
$$5 = a \cdot 3 \cdot (-3)$$
$$a = -\frac{5}{9}$$

Wzór funkcji g:

$$g(x) = -\frac{5}{9}(x-2)(x-8)$$

****
****

7. Rozwiąż równanie $(2x+1)+(2x+4)+(2x+7)+\ldots+(2x+28)=155$, jeśli wiadomo, że składniki po lewej stronie są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego.

****

Rozwiązanie

Pierwszy wyraz ciągu: $a_1 = 2x+1$
Różnica ciągu: $r = 3$
$a_n = a_1 + (n-1)r$
Z tematu zadania $a_n = 2x+28$, czyli
$2x+28 = a_1 + (n-1)r$
$2x+28 = 2x+1+(n-1)\cdot 3$
$28 = 1+3n-3$
$30 = 3n$
$n = 10$ – liczba sumowanych wyrazów

Lewa strona równania jest sumą:

$$S_n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n = \frac{2x+1+2x+28}{2}\cdot 10 = (4x+29)\cdot 5 = 20x+145$$

Równanie ma postać:
$20x+145 = 155$
$20x = 10$
$x = \frac{1}{2}$ - rozwiązanie równania

****
****

8. Wiedząc, że α jest kątem ostrym i $\operatorname{tg}\alpha = 2$, oblicz wartość wyrażenia $\frac{4\cos\alpha - 3\sin\alpha}{3\cos\alpha + 5\sin\alpha}$

****

Rozwiązanie

α jest kątem ostrym i $\operatorname{tg}\alpha = 2$

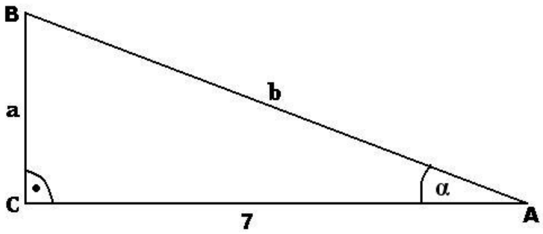
$$\frac{4\cos\alpha - 3\sin\alpha}{3\cos\alpha + 5\sin\alpha} = \frac{\frac{4\cos\alpha}{\cos\alpha} - \frac{3\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{3\cos\alpha}{\cos\alpha} + \frac{5\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{4-3\operatorname{tg}\alpha}{3+5\operatorname{tg}\alpha} = \frac{4-3\cdot 2}{3+5\cdot 2} = \frac{-2}{13}$$

****
****

9. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o przeciwprostokątnej AB, taki że $\sin \sphericalangle BAC = 0,3$ i $|AC| = 7$. Oblicz pole koła opisanego na tym trójkącie.

****

Rozwiązanie



Promień koła opisanego na trójkącie prostokątnym jest połową przeciwprostokątnej:

$$R = \frac{b}{2}$$

Należy obliczyć: $P = \pi R^2$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$(0,3)^2 + \cos^2\alpha = 1$$
$$\cos^2\alpha = 1 - 0,09$$
$$\cos^2\alpha = 0,91$$
$$\cos\alpha = \sqrt{0,91} = \sqrt{\frac{91}{100}} = \frac{\sqrt{91}}{10}$$

Jednocześnie $\cos\alpha = \frac{7}{b}$

$$\frac{7}{b} = \frac{\sqrt{91}}{10}$$
$$b = \frac{70}{\sqrt{91}} = \frac{70\sqrt{91}}{91} = \frac{10\sqrt{91}}{13}$$

$$R = \frac{b}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10\sqrt{91}}{13} = \frac{5\sqrt{91}}{13}$$

$$P = \pi R^2 = \pi \cdot \left(\frac{5\sqrt{91}}{13}\right)^2 = \pi \cdot \frac{25 \cdot 91}{169} = \frac{2275}{169}\pi$$

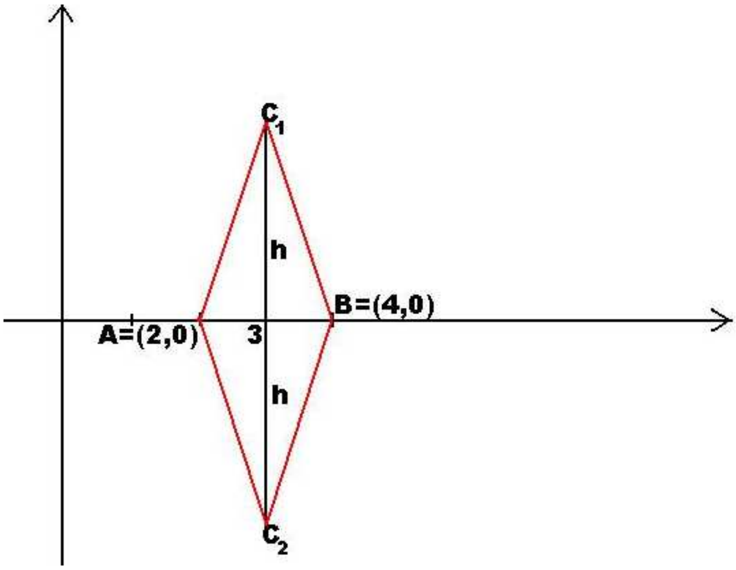
****

****

10. W układzie współrzędnych na płaszczyźnie zaznaczono punkty $A = (2,0)$ i $B = (4,0)$. Wyznacz wszystkie możliwe położenia punktu C, dla których ABC jest trójkątem równoramiennym o podstawie AB i polu równym 3.

****

Rozwiązanie



$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h = 3$

$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot h = 3$

$h = 3$

Istnieją dwa takie punkty:
$C_1 = (3,3), \ C_2 = (3,-3)$

****
****

11. Rzucamy trzy razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Opisz zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych, a następnie oblicz prawdopodobieństwo, że w każdym rzucie liczba oczek będzie większa od numeru rzutu.

****

Rozwiązanie

Zbiór zdarzeń elementarnych jest zbiorem trzywyrazowych ciągów (a,b,c), gdzie:
a - wynik pierwszego rzutu
b - wynik drugiego rzutu
c - wynik trzeciego rzutu
$a,b,c \in \{1,2,3,4,5,6\}$

Wszystkich zdarzeń elementarnych jest $\overline{\overline{\Omega}} = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$
Zdarzenie A - **w każdym rzucie liczba oczek będzie większa od numeru rzutu**

Aby zaszło zdarzenie A, musi być spełnione kolejno:

- w pierwszym rzucie musi wypaść liczba ze zbioru $\{2,3,4,5,6\}$
- w drugim rzucie musi wypaść liczba ze zbioru $\{3,4,5,6\}$
- w trzecim rzucie musi wypaść liczba ze zbioru $\{4,5,6\}$

Dlatego $\overline{\overline{A}} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{60}{216} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$