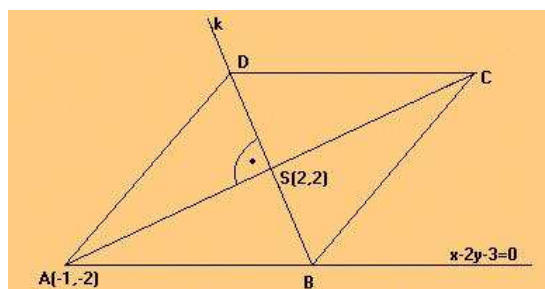


## Przykładowy arkusz z rozwiązaniami

### Arkusz II – poziom rozszerzony

13. (5 pkt) Punkt  $A = (-1, -2)$  jest wierzchołkiem rombu, którego jeden z boków zawiera się w prostej  $k$  o równaniu  $x - 2y - 3 = 0$ . Środkiem symetrii tego rombu jest punkt  $S = (2, 2)$ . Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków rombu i oblicz jego pole.

**Rozwiązanie:**



W rombie przekątne dzielą się na połowy, więc  $S$  jest środkiem odcinka  $AC$ .

Niech  $C = (c_1, c_2)$ . Wtedy:  $\frac{-1 + c_1}{2} = 2 \Leftrightarrow c_1 = 5$ , oraz  $\frac{-2 + c_2}{2} = 2 \Leftrightarrow c_2 = 6$ , czyli punkt  $C$  ma współrzędne  $C = (5, 6)$ .

Prosta  $k$  zawierająca przekątną  $BD$  rombu jest prostopadła do wektora  $\overrightarrow{AS}$ , bo przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym.

$$\overrightarrow{AS} = [2 + 1, 2 + 2] = [3, 4]$$

Prosta  $k$ , jako prostopadła do tego wektora, ma równanie:  $3x + 4y + m = 0$ .

Punkt  $S = (2, 2)$  spełnia równanie prostej  $k$ , stąd:  $3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + m = 0 \Leftrightarrow m = -14$ .

Prosta  $k$  ma równanie:  $3x + 4y - 14 = 0$ .

Współrzędne punktu  $B$  obliczymy, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ 3x + 4y - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3 \\ 3 \cdot (2y + 3) + 4y - 14 = 0 \end{cases}$$

$$6y + 9 + 4y - 14 = 0$$

$$10y = 5$$

$$y = \frac{1}{2} \text{ i } x = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 = 4$$

Punkt  $B$  ma współrzędne  $B = \left(4, \frac{1}{2}\right)$ .

$S$  jest środkiem odcinka  $BD$ . Niech  $D = (d_1, d_2)$ .

$$2 = \frac{4 + d_1}{2} \Leftrightarrow d_1 = 0, \text{ oraz } 2 = \frac{\frac{1}{2} + d_2}{2} \Leftrightarrow d_2 = \frac{7}{2}.$$

Punkt  $D$  ma współrzędne  $D = \left(0, \frac{7}{2}\right)$ .

Szukane współrzędne wierzchołków rombu:  $B = \left(4, \frac{1}{2}\right)$ ,  $C = (5, 6)$ ,  $D = \left(0, \frac{7}{2}\right)$ .

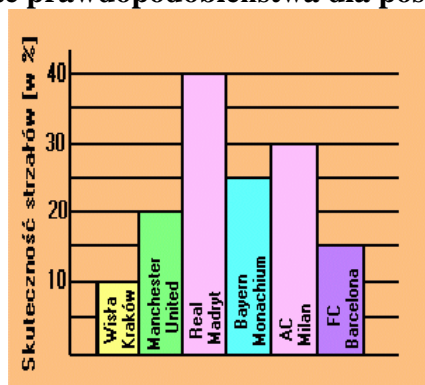
Pole rombu jest równe połowie iloczynu długości przekątnych:

$$|AC| = \sqrt{(5+1)^2 + (6+2)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

$$|BD| = \sqrt{(4-0)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{Pole rombu: } P = \frac{10 \cdot 5}{2} = 25.$$

14. (5 pkt) Prawdopodobieństwo uzyskania bramki przez drużynę piłkarską przy oddaniu jednego strzału oblicza się jako stosunek liczby zdobytych bramek do liczby oddanych strzałów na bramkę i wyraża się je zwykle w procentach. Na poniższym diagramie przedstawiono te prawdopodobieństwa dla poszczególnych drużyn:



- Co jest bardziej prawdopodobne: zdobycie dwóch bramek przez Wisłę Kraków przy oddanych 6 strzałach, czy zdobycie 3 bramek przez Manchester United przy oddanych 5 strzałach?
- Ile strzałów na bramkę musi oddać w czasie meczu drużyna Realu Madryt, aby prawdopodobieństwo strzelenia jednej bramki było większe od 0,9?

**Rozwiązanie:**

- Oddanie przez Wisłę Kraków 6 strzałów to schemat Bernoulliego o sześciu próbach, bo prawdopodobieństwo sukcesu (zdobycia gola) w każdym strzale jest takie samo i wynosi  $p_1 = 10\% = \frac{1}{10}$ .

$$\text{Stąd } P(S_6 = 2) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^4 = 15 \cdot \frac{9^4}{10^6} \approx 0,0984. \text{ Podobnie dla Manchesteru}$$

United, gdzie prawdopodobieństwo sukcesu wynosi  $p_2 = 20\% = \frac{1}{5}$ :

$$P(S_5 = 3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 10 \cdot \frac{4^2}{5^5} \approx 0,0512$$

Bardziej prawdopodobne jest zdobycie przez Wisłę Kraków dwóch bramek w 6 strzałach.

- Oznaczmy przez  $n$  szukaną ilość strzałów. Mamy do czynienia ze schematem Bernoulliego o  $n$  próbach i prawdopodobieństwie sukcesu  $p_3 = 40\% = \frac{2}{5}$ .

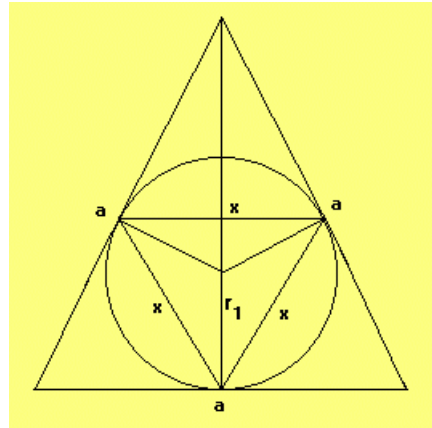
$$P(S_n \geq 1) > 0,9 \Leftrightarrow 1 - P(S_n = 0) > 0,9 \Leftrightarrow P(S_n = 0) < 0,1$$

$$\binom{n}{0} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n < 0,1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^n < 0,1$$

Licząc kolejne potęgi liczby  $\frac{3}{5}$  stwierdzamy, że nierówność jest spełniona dla  $n > 4$ , czyli drużyna Realu Madryt musi oddać minimum 5 strzałów, aby szansa na zdobycie co najmniej jednej bramki była większa od 0,9.

15. (4 pkt) W trójkąt równoboczny o boku długości  $a$  wpisano koło, w które następnie wpisano trójkąt równoboczny, a w ten trójkąt znowu koło itd. Oblicz sumę pól wszystkich wpisanych kół.

Rozwiązanie:



Dane:  $a$ .

Promień koła wpisanego w trójkąt równoboczny ma długość równą  $\frac{1}{3}$  wysokości

trójkąta, więc  $r_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ .

Z kolei  $r_1$  stanowi  $\frac{2}{3}$  wysokości trójkąta o boku  $x$ , wpisanego w koło o promieniu  $r_1$ .

Stąd mamy:  $\frac{2}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = r_1$ . Z tego równania obliczymy  $x$ :  $x = \frac{3r_1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}r_1 = \sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a}{2}$ .

Ciąg długości boków kolejnych trójkątów jest ciągiem geometrycznym o ilorazie  $q = \frac{1}{2}$ .

Z własności figur podobnych mamy ciąg promieni okręgów:  $r_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ ,  $q = \frac{1}{2}$ , z czego

otrzymujemy wzór na  $n$ -ty wyraz:  $r_n = r_1 \cdot q^{n-1} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$ .

Ciąg pól kolejnych kół jest określony wzorem:

$$P_n = \pi \cdot r_n^2 = \pi \cdot \frac{3a^2}{36} \cdot \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{12} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$P_1 = \frac{\pi a^2}{12} \text{ i } q_p = \frac{1}{4}$$

Ponieważ  $|q_p| < 1$ , więc suma nieskończonego ciągu pól istnieje i wynosi:

$$S = \frac{P_1}{1 - q_p} = \frac{\frac{\pi a^2}{12}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi a^2}{12} = \frac{\pi a^2}{9}, \text{ co należało obliczyć.}$$

16. (7 pkt) Liczby  $x_1$  i  $x_2$  są pierwiastkami równania  $(m+1)x^2 + (m+1)x + \frac{1}{2}m^2 = 0$ .

Rozważmy funkcję  $f(m) = x_1 \cdot x_2$ .

a) Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji  $f$ .

b) Dla jakiej wartości parametru  $m$  funkcja  $f$  przyjmuje największą wartość?

**Rozwiązanie:**

$$(m+1)x^2 + (m+1)x + \frac{1}{2}m^2 = 0, \quad f(m) = x_1 \cdot x_2$$

Dziedziną funkcji  $f$  jest zbiór tych wartości parametru  $m$ , dla których istnieją (niekoniecznie różne) pierwiastki  $x_1$  i  $x_2$  podanego równania, czyli spełniających układ:

$$\begin{cases} m \neq -1 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}.$$

$$\Delta = (m+1)^2 - 4 \cdot (m+1) \cdot \frac{1}{2}m^2 = (m+1)^2 - 2m^2(m+1) = (m+1)(m+1-2m^2)$$

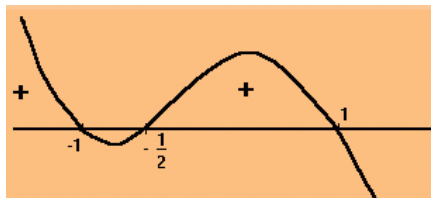
$$-2m^2 + m + 1$$

$$\Delta_1 = 1 + 8 = 9$$

$$m_1 = \frac{-1-3}{-4} = 1, \quad m_2 = \frac{-1+3}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$\Delta = -2(m+1)(m-1)\left(m + \frac{1}{2}\right)$$

Wykres  $\Delta(m)$ :



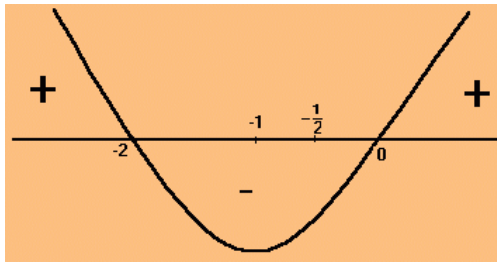
$$(m \neq -1 \wedge \Delta \geq 0) \Leftrightarrow m \in (-\infty, -1) \cup \left\langle -\frac{1}{2}, 1 \right\rangle = D_f$$

Korzystając ze wzorów Viete'a mamy:

$$f(m) = x_1 \cdot x_2 = \frac{\frac{1}{2}m^2}{m+1} = \frac{m^2}{2m+2}$$

$$a) f'(m) = \frac{2m \cdot (2m+2) - 2m^2}{(2m+2)^2} = \frac{4m^2 + 4m - 2m^2}{(2m+2)^2} = \frac{2m^2 + 4m}{(2m+2)^2} = \frac{2m(m+2)}{(2m+2)^2}$$

Badamy znak pochodnej, który zależy od znaku wyrażenia  $m(m+2)$ :



Z wykresu wynika, że:

- funkcja  $f(m)$  rośnie w przedziałach:  $(-\infty, -2)$ ,  $(0, 1)$ .
- funkcja  $f(m)$  maleje w przedziałach:  $(-2, -1)$ ,  $(-\frac{1}{2}, 0)$ .
- Dla  $x = -2$  funkcja osiąga maksimum równe:  $f(-2) = \frac{(-2)^2}{2 \cdot (-2) + 2} = -2$ .
- Dla  $x = 0$  funkcja osiąga maksimum równe:  $f(0) = 0$ .

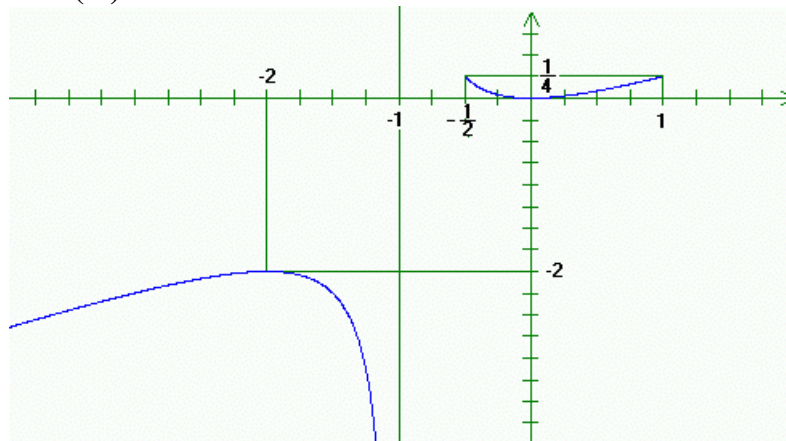
b) Wartości funkcji na końcach przedziału wynoszą:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2} = \frac{1}{4}, \quad f(1) = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{m^2}{2m + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{m}{2 + \frac{2}{m}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{m^2}{2m + 2} = -\infty, \text{ bo licznik dąży do } 1, \text{ a mianownik do zera po wartościach}$$

ujemnych. Wykres  $f(m)$ :



Z wykresu wynika, że funkcja przyjmuje największą wartość dla  $m = -\frac{1}{2}$  lub  $m = 1$ , oraz wartość ta wynosi  $\frac{1}{4}$ .

17. (5 pkt) Wykaż, że dla każdej naturalnej, dodatniej liczby  $n$ , liczba postaci  $2^{n+1} + 3^{2n-1}$  jest podzielna przez 7.

### Rozwiązanie:

Dowód indukcyjny.

Sprawdzamy prawdziwość twierdzenia dla  $n = 1$ :  $2^{1+1} + 3^{2 \cdot 1 - 1} = 4 + 3 = 7$ .

Twierdzenie jest prawdziwe dla  $n = 1$ .

Zakładamy, że twierdzenie jest prawdziwe dla pewnej liczby naturalnej  $n$ , tzn. liczba  $2^{n+1} + 3^{2n-1}$  jest podzielna przez 7.

Aby zakończyć dowód, należy udowodnić, że przez 7 dzieli się liczba  $2^{n+1+1} + 3^{2(n+1)-1} = 2^{n+2} + 3^{2n+1}$ .

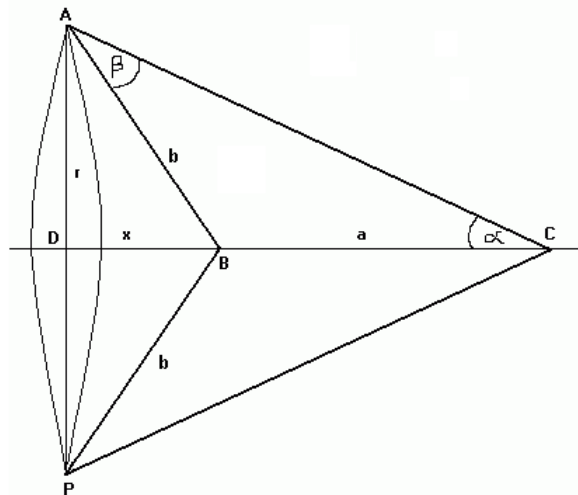
$$2^{n+2} + 3^{2n+1} = 2^{n+1} \cdot 2^1 + 3^{2n-1} \cdot 3^2 = 2 \cdot 2^{n+1} + 9 \cdot 3^{2n-1} = 2 \cdot (2^{n+1} + 3^{2n-1}) + 7 \cdot 3^{2n-1}$$

Wyrażenie  $2 \cdot (2^{n+1} + 3^{2n-1})$  dzieli się przez 7 z założenia.

Przez 7 dzieli się także liczba  $7 \cdot 3^{2n-1}$ , co kończy dowód.

18. (5 pkt) Dany jest trójkąt ABC, w którym  $|\angle BCA| = \alpha$ ,  $|\angle BAC| = \beta$ , zaś  $|\angle ABC| > 90^\circ$ . Promień okręgu opisanego na tym trójkącie ma długość R. Trójkąt obracamy wokół boku BC. Oblicz objętość otrzymanej bryły obrotowej.

### Rozwiązanie:



Dane są:  $\alpha, \beta, R, |\angle ABC| > 90^\circ$ .

R - promień okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Szukana objętość, to różnica objętości stożków APC i APB, czyli:

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot (a+x) - \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot x = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot (a+x-x) = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot a$$

Korzystając z twierdzenia sinusów w trójkącie ABC, otrzymujemy:

$$\frac{a}{\sin \beta} = 2R \Leftrightarrow a = 2R \sin \beta \quad \text{i} \quad \frac{b}{\sin \alpha} = 2R \Leftrightarrow b = 2R \sin \alpha$$

$$|\angle ABC| = 180^\circ - (\alpha + \beta), \text{ dlatego } |\angle ABD| = \alpha + \beta$$

$$\frac{r}{b} = \sin(\alpha + \beta) \Leftrightarrow r = b \sin(\alpha + \beta) = 2R \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)$$

Szukana objętość wynosi:

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot a = \frac{\pi}{3} \cdot 4R^2 \sin^2 \alpha \sin^2(\alpha + \beta) \cdot 2R \sin \beta = \frac{8\pi}{3} \cdot R^3 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin^2(\alpha + \beta)$$

19. (5 pkt) Dla jakich wartości parametru  $\alpha$  rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} (\cos \alpha - 1) \cdot x + y = 1 \\ (-2 \cos \alpha) \cdot x + (2 \cos \alpha + 1) \cdot y = \cos \alpha \end{cases}$$

jest dokładnie jedna para liczb nieujemnych?

**Rozwiązanie:**

Stosujemy metodę wyznacznikową. Dla uproszczenia zapisu przyjmijmy  $m = \cos \alpha$ .

Mamy:

$$\begin{cases} (m - 1) \cdot x + y = 1 \\ -2m \cdot x + (2m + 1) \cdot y = m \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} m - 1 & 1 \\ -2m & 2m + 1 \end{vmatrix} = (m - 1) \cdot (2m + 1) + 2m = 2m^2 + m - 2m - 1 + 2m = 2m^2 + m - 1$$

Układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie, gdy:

$$W = 2m^2 + m - 1 \neq 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9, m_1 = \frac{-1 - 3}{4} = -1, m_2 = \frac{-1 + 3}{4} = \frac{1}{2}$$

Aby układ miał dokładnie jedno rozwiązanie, musi być:  $m \neq -1$  i  $m \neq \frac{1}{2}$ .

$$W_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 2m + 1 \end{vmatrix} = 2m + 1 - m = m + 1$$

$$W_y = \begin{vmatrix} m - 1 & 1 \\ -2m & m \end{vmatrix} = m^2 - m + 2m = m^2 + m = m \cdot (m + 1)$$

$$W = 2m^2 + m - 1 = 2(m + 1) \left( m - \frac{1}{2} \right)$$

**Rozwiązanie układu:**

$$\begin{cases} x = \frac{W_x}{W} = \frac{m + 1}{2(m + 1) \left( m - \frac{1}{2} \right)} = \frac{1}{2 \cdot \left( m - \frac{1}{2} \right)} \\ y = \frac{W_y}{W} = \frac{m \cdot (m + 1)}{2(m + 1) \left( m - \frac{1}{2} \right)} = \frac{m}{2 \cdot \left( m - \frac{1}{2} \right)} \end{cases}$$

Rozwiązaniem ma być para liczb nieujemnych:  $x \geq 0$  i  $y \geq 0$ .

$$x \geq 0 \Leftrightarrow m - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$$

$$y \geq 0 \Leftrightarrow \frac{m}{2 \cdot \left( m - \frac{1}{2} \right)} \geq 0 \Leftrightarrow \left[ m \neq \frac{1}{2} \text{ i } m \cdot \left( m - \frac{1}{2} \right) \geq 0 \right] \Leftrightarrow m \in \left( -\infty, 0 \right) \cup \left( \frac{1}{2}, \infty \right)$$

Ostatecznie otrzymaliśmy:

$$\begin{cases} m \neq -1 \text{ i } m \neq \frac{1}{2} \\ m > \frac{1}{2} \\ m \in \left(-\infty, 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}, \text{ czyli } \cos \alpha > \frac{1}{2}$$

Korzystając z wykresu funkcji  $y = \cos \alpha$ , otrzymujemy:

$$\cos \alpha > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{C}, \text{ co jest rozwiązaniem zadania.}$$

20. (6 pkt) Narysuj wykres funkcji określonej wzorem:  $f(x) = 4^{|\log_2(x-1)|}$ . Wyznacz te argumenty, dla których wartości funkcji są równe  $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{9}$ .

**Rozwiązanie:**

Dziedzina funkcji  $f(x) = 4^{|\log_2(x-1)|}$ :  $D_f = (1, \infty)$ .

$$\log_2(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow \log_2(x-1) \geq \log_2 1 \Leftrightarrow x-1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2$$

$$\log_2(x-1) < 0 \Leftrightarrow \log_2(x-1) < \log_2 1 \Leftrightarrow x-1 < 1 \Leftrightarrow x \in (1, 2)$$

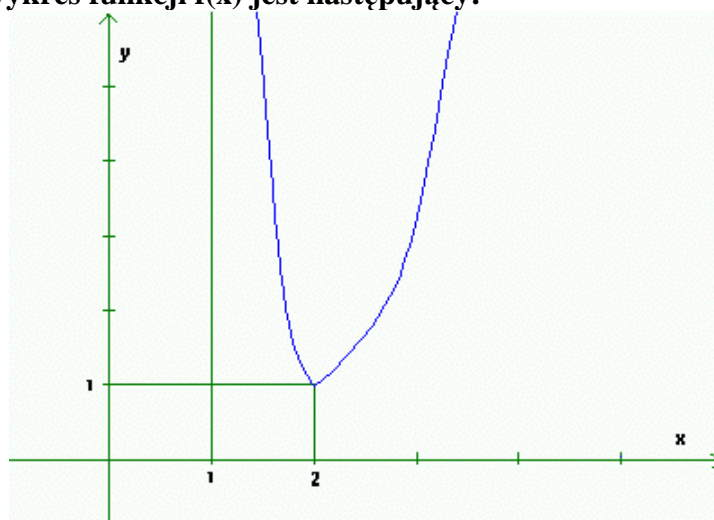
Mamy:

$$1. \text{ Dla } x \geq 2: f(x) = 4^{\log_2(x-1)} = 2^{2\log_2(x-1)} = 2^{\log_2(x-1)^2} = (x-1)^2$$

$$2. \text{ Dla } x \in (1, 2): f(x) = 4^{-\log_2(x-1)} = 2^{-2\log_2(x-1)} = 2^{\log_2(x-1)^{-2}} = \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{dla } x \geq 2 \\ \frac{1}{(x-1)^2} & \text{dla } x \in (1, 2) \end{cases}$$

Wartość ułamka  $\frac{1}{(x-1)^2}$  przy  $x \rightarrow 2^-$  zbliża się do liczby 1, a przy  $x$  zmniejszającym się do 1, rośnie do nieskończoności, bo mianownik ułamka dąży do zera po wartościach dodatnich. Stąd wykres funkcji  $f(x)$  jest następujący:



$$\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{9} = m \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^m = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \left(3^{\frac{1}{2}-1}\right)^m = 3^{-2} \Leftrightarrow 3^{-\frac{1}{2}m} = 3^{-2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}m = -2 \Leftrightarrow m = 4$$

Należy rozwiązać równanie  $f(x) = \log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{9}$ , czyli  $f(x) = 4$ .

1. Dla  $m \geq 2$ :  $(m-1)^2 = 4 \Leftrightarrow m = 3$

2. Dla  $m \in (1,2)$ :  $\frac{1}{(m-1)^2} = 4 \Leftrightarrow (m-1)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Funkcja przyjmuje wskazaną tematem zadania wartość dla  $x = 3$  lub  $x = \frac{3}{2}$ .

21. (4 pkt) Wykaż, że jeżeli  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , oraz  $\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \neq 0$ ,

to  $\frac{\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ .

**Rozwiązanie:**

1.  $\sin \gamma = \sin[\pi - (\alpha + \beta)] = \sin(\alpha + \beta) = \sin\left(2 \cdot \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$

2.  $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

Na podstawie 1. i 2. otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma} &= \frac{2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}} = \\ &= \frac{2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2}\right)} = \frac{-2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin\left(-\frac{\beta}{2}\right)}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos\left(-\frac{\beta}{2}\right)} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \end{aligned}$$

co należało wykazać.

**Uwaga:** poniższe nie jest fragmentem rozwiązania.

W rozwiązaniu wykorzystano kolejno wzory:

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

22. (4 pkt) Dany jest zbiór  $A = \{(x,y): x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 - 4y \leq 0\}$ . Zbiór B jest obrazem zbioru A w translacji o wektor  $\vec{u} = [2, -1]$ . Opisz zbiór B za pomocą nierówności, a następnie zaznacz na płaszczyźnie zbiór  $(A \cup B)'$ .

**Rozwiązanie:**

$$x^2 + y^2 - 4y \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 \leq 4$$

Zbiór A jest kołem o środku  $S_1 = (0, 2)$  i promieniu  $r = 2$ .

Zbiór B jest kołem o środku  $S_2 = (0 + 2, 2 + (-1)) = (2, 1)$  i takim samym promieniu.

$(A \cup B)'$  jest dopełnieniem sumy tych kół do płaszczyzny XOY. Brzegi kół nie należą do tego zbioru.

Ilustracja (szukany zbiór  $(A \cup B)'$  zaznaczono kolorem niebieskim):

