

## Przykładowy arkusz z rozwiązaniami

### Arkusz I – poziom podstawowy

1. (4 pkt) Rozwiąż nierówność:  $x^3 + 2x^2 \geq 4x + 8$ , a następnie wskaż najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą tę nierówność (o ile taka liczba istnieje).

**Rozwiązanie:**

$$\begin{aligned}x^3 + 2x^2 \geq 4x + 8 &\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(x+2) - 4(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow (x+2)(x^2 - 4) \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+2)(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)^2(x-2) \geq 0\end{aligned}$$

Nierówność jest spełniona dla  $x = -2$ . Jeżeli  $x \neq -2$ , to wyrażenie  $(x+2)^2$  jest liczbą dodatnią, więc musi być:  $x - 2 \geq 0$ , stąd  $x \geq 2$ .

Ostatecznie rozwiązaniem nierówności jest  $x \in \{-2\} \cup \langle 2, \infty \rangle$ .

Najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność jest  $-2$ .

2. (3 pkt) Cenę komputera podniesiono najpierw o 10%, a po pewnym czasie jeszcze o 20%. O ile procent należałoby jednorazowo podnieść cenę komputera, aby uzyskać taką samą cenę jak po obu podwyżkach?

**Rozwiązanie:**

Oznaczmy:  $x$  – początkowa cena komputera. Mamy:

110%  $x = 1,1x$  - cena komputera po pierwszej podwyżce

120% z  $1,1x = 1,2 \cdot 1,1x = 1,32x$  - cena komputera po drugiej podwyżce

Stąd wynika, że cena końcowa, to  $1,32 = 132\%$  ceny początkowej.

Aby uzyskać taki sam efekt za pomocą jednej podwyżki, należałoby podnieść cenę komputera o 32%.

3. (4 pkt) Numer ewidencyjny PESEL składa się z 11 cyfr. Sześć pierwszych cyfr oznacza datę urodzenia osoby (np. cyframi 730328 rozpoczyna się numer PESEL osoby urodzonej 28 marca 1973 roku). Pozostałe cyfry są dowolne i mogą się powtarzać. Ile może być wszystkich numerów PESEL:

a) przyporządkowanych osobom urodzonym w marcu 1973 roku?

b) przyporządkowanych osobom urodzonym 28 marca 1973 roku, takich, że trzy ostatnie cyfry numeru są różnymi liczbami pierwszymi, a cyfry siódma i ósma są liczbami nieparzystymi?

**Rozwiązanie:**

a) Osoby urodzone w marcu 1973 roku mają następujący numer PESEL: 7303ddxxxx, gdzie :

dd = dzień urodzenia - liczba ze zbioru  $\{1,2,3,\dots,31\}$ , gdyż marzec ma 31 dni

xxxxx = dowolny ciąg pięciu cyfr - ten ciąg może być utworzony na  $10^5$  sposobów, gdyż tyle jest wszystkich 5-wyrazowych wariacji z powtórzeniami utworzonych z elementów 10-elementowego zbioru cyfr.

Ostatecznie: ilość numerów PESEL dla takich osób jest iloczynem liczb 31 i  $10^5$ , czyli 3 100 000

b) Szukane numery PESEL muszą mieć następującą postać: 730328nnppp, gdzie: nn - dwuwyzorowy ciąg utworzony z (niekoniecznie różnych) cyfr nieparzystych. Zbiór cyfr nieparzystych:  $\{1,3,5,7,9\}$  jest 5-elementowy, więc takich ciągów jest  $5^2 = 25$ .

ppp - dwuwyzorowy ciąg utworzony z różnych liczb pierwszych.

Zbiór tych cyfr, które są liczbami pierwszymi: {2,3,5,7} jest czteroelementowy, więc takich ciągów jest tyle, ile trzywyrazowych wariacji bez powtórzeń utworzonych z elementów 4-elementowego zbioru, tzn. 24.

Ostatecznie liczba poszukiwanych numerów PESEL jest iloczynem liczb 25 i 24, czyli wynosi ona 600.

4. Aby usunąć niewymierność z mianownika ułamka  $\frac{\sqrt[3]{7}}{2-\sqrt[3]{7}}$ , korzystamy ze wzoru

skróconego mnożenia  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ , mnożąc licznik i mianownik ułamka przez niepełny kwadrat sumy liczb: 2 i  $\sqrt[3]{7}$ :

$$\frac{\sqrt[3]{7}}{2-\sqrt[3]{7}} = \frac{\sqrt[3]{7} \cdot (4 + 2\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49})}{(2-\sqrt[3]{7}) \cdot (4 + 2\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49})} = \frac{4\sqrt[3]{7} + 2\sqrt[3]{49} + 7}{2^3 - (\sqrt[3]{7})^3} = 4\sqrt[3]{7} + 2\sqrt[3]{49} + 7$$

Posługując się tą metodą, oblicz wartość sumy:

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}+1} + \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$$

**Rozwiązanie:**

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}+1} + \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1} &= \frac{\sqrt[3]{2} \cdot (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)}{(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)} + \frac{\sqrt[3]{2} \cdot (\sqrt[3]{2} - 1)}{(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{2} - 1)} = \\ &= \frac{3 \cdot (\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2})}{(\sqrt[3]{2})^3 + 1} + \frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{2})^3 - 1} = \frac{3 \cdot (2 - \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2})}{3} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} = \\ &= 2 - \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} = 2 \end{aligned}$$

5. (4 pkt) W roku 1845 na uroczystości urodzin spytał ktoś jubilata, ile on ma lat. Jubilat odpowiedział: „Gdy swój wiek sprzed 15 lat pomnożę przez swój wiek za 15 lat, to otrzymam rok swego urodzenia”. Ile lat miał wówczas jubilat?

**Rozwiązanie:**

Jeżeli przez  $x$  oznaczymy wiek jubilata w chwili, gdy wypowiada te słowa, to otrzymamy:  $(x-15)(x+15) = R$ , gdzie  $R$  jest jego rokiem urodzenia, oraz  $x > 15$  i  $x \in \mathbb{N}$ .

Rok urodzenia jubilata jest równy:  $R = 1845 - x$ .

Mamy:

$$(x-15)(x+15) = 1845 - x$$

$$x^2 - 225 = 1845 - x$$

$$x^2 + x - 2070 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8280 = 8281, \sqrt{\Delta} = 91$$

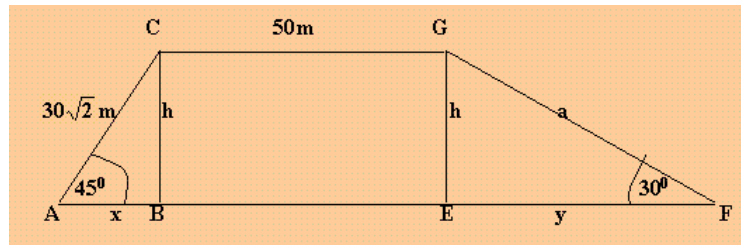
$$x_1 = \frac{-1-91}{2} = -46 \quad \text{-- odrzucamy, bo } n \in \mathbb{N}$$

$$x_2 = \frac{-1+91}{2} = 45$$

Jubilat miał 45 lat.

6. (5 pkt) Działka państwa Jabłońskich ma kształt trapezu, w którym kąty przy dłuższej podstawie mają miary  $30^\circ$  i  $45^\circ$ , krótsze ramię ma długość  $30\sqrt{2}$  m, a krótsza podstawa 50 m. Pan Jabłoński postanowił wybudować ogrodzenie. Oblicz pole powierzchni działki i długość ogrodzenia.

Rozwiązanie:



Należy obliczyć:

a) Pole działki:  $P = \frac{50 + x + y + 50}{2} \cdot h = \frac{100 + x + y}{2} \cdot h$

b) Obwód działki:  $L = 100 + x + y + a + 30\sqrt{2}$

$h = x = 30$  (ze wzoru na długość przekątnej kwadratu)

$$\frac{h}{y} = \operatorname{tg} 30^\circ \Leftrightarrow \frac{30}{y} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow y = 30\sqrt{3}$$

$$\frac{h}{a} = \sin 30^\circ \Leftrightarrow \frac{30}{a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 60$$

Pole działki:

$$P = \frac{100 + x + y}{2} \cdot h = \frac{100 + 30 + 30\sqrt{3}}{2} \cdot 30 = (130 + 30\sqrt{3}) \cdot 15 = 1950 + 450\sqrt{3}$$

Pole działki wynosi  $(1950 + 450\sqrt{3}) \text{ m}^2$ .

Obwód działki:

$$L = 100 + x + y + a + 30\sqrt{2} = 100 + 30 + 30\sqrt{3} + 60 + 30\sqrt{2} = 190 + 30\sqrt{3} + 30\sqrt{2}$$

Obwód działki wynosi:  $(190 + 30\sqrt{3} + 30\sqrt{2}) \text{ m}$ .

7. (4 pkt) W tabeli podano dla porównania dwa plany taryfowe w ofercie sieci komórkowej Orange:

| Plan taryfowy  | Orange 15              | Orange 30               |
|--|------------------------|-------------------------|
| Wysokość abonamentu  | 30 zł                  | 40 zł                   |
| Liczba bezpłatnych minut i bezpłatnych SMS-ów w abonamencie (koszt 1 min=koszt 4 SMS-ów) | 15 minut<br>lub 60 SMS | 30 minut<br>lub 120 SMS |
| Koszt 1 min. po przekroczeniu pakietu bezpłatnych minut                                  | 1 zł 65 gr             | 1 zł 35 gr              |
| Koszt pojedynczego SMS-a po przekroczeniu pakietu bezpłatnych SMS-ów                     | 24 gr                  | 24 gr                   |

- a) Który plan taryfowy powinna wybrać osoba, która rozmawia 20 minut miesięcznie? Odpowiedź uzasadnij.
- b) Dla obu planów taryfowych napisz wzory wyrażające zależność między wysokością rachunku, a liczbą wykorzystanych dodatkowych minut dla osoby, która nie wysłała dodatkowych SMS-ów.
- c) Przy ilu dodatkowych minutach rachunek zapłacony w ofercie Orange 15 jest mniejszy, niż w ofercie Orange 30?

**Rozwiązanie:**

a) W Orange 15 taka osoba zapłaci 30 zł abonamentu, oraz  $5 \cdot 1,65 = 8,25$  zł, czyli łącznie 38,25 zł.

W Orange 30 zapłaci 40 zł abonamentu.

Należy wybrać Orange 15.

b) Oznaczmy w obu przypadkach:  $x$  – liczba wykorzystanych dodatkowych minut,  $x \in \{0,1,2,3,\dots\}$ .

W Orange 15 rachunek wynosi  $f(x) = 30 + 1,65 \cdot x$ , a w Orange 30  $g(x) = 40 + 1,35 \cdot x$ .

c) Należy obliczyć, dla jakich  $x$  spełniona jest nierówność  $f(x) < g(x)$ .

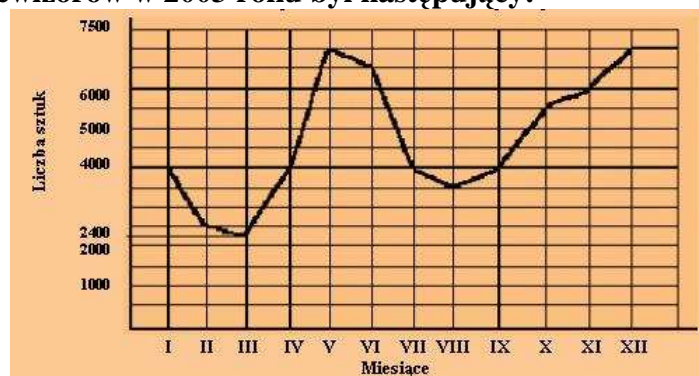
$$30 + 1,65 \cdot x < 40 + 1,35 \cdot x$$

$$0,3 \cdot x < 10$$

$$x < 33\frac{1}{3}$$

Rachunek w Orange 15 jest mniejszy, gdy ilość dodatkowych minut nie przekracza 33.

8. (4 pkt) W pewnej dużej firmie, sprzedającej sprzęt RTV-AGD wykres liczby sprzedanych telewizorów w 2003 roku był następujący:



Na podstawie wykresu:

a) Odczytaj, w jakich okresach sprzedaż telewizorów wzrastała.

b) Odczytaj, w jakim miesiącu sprzedano najwięcej telewizorów, a w jakim najmniej.

c) Oblicz, jakim procentem liczby sprzedanych telewizorów była sprzedaż w grudniu.

d) Oblicz, jaka była średnia liczba telewizorów sprzedanych miesięcznie w tym roku.

**Rozwiązanie:**

a) Sprzedaż telewizorów wzrastała od początku marca do końca kwietnia, oraz od początku sierpnia do końca listopada.

b) Najwięcej telewizorów sprzedano w maju i w grudniu (7000), a najmniej w marcu (2400).

c) Łączna ilość sprzedanych telewizorów:

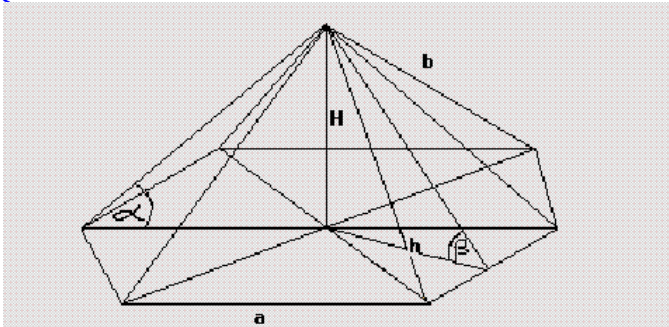
$$4000 + 2500 + 2400 + 4000 + 7000 + 6500 + 4000 + 3500 + 4000 + 5500 + 6000 + 7000 = 56400$$

$$\text{Sprzedaż w grudniu to: } \frac{7000}{56400} \cdot 100\% = \frac{7000}{564}\% \approx 12,41\%$$

d) Średnia liczba sprzedanych miesięcznie telewizorów:  $\frac{56400}{12} = 4700$

9. (5 pkt) Dach pewnej budowli ma kształt ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego. Krawędź boczna tego ostrosłupa ma długość  $b$ , a miara kąta nachylenia tej krawędzi do płaszczyzny podstawy wynosi  $\alpha$ . Wyznacz objętość tego ostrosłupa i tangens kąta dwuściennego między ścianą boczną a płaszczyzną podstawy.

Rozwiązanie:



Dane są:  $b, \alpha$

Należy obliczyć:

$$a) \quad V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{a^2 \sqrt{3} \cdot H}{2}$$

$$b) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{H}{h} = \frac{H}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2H}{a\sqrt{3}}$$

$$\frac{a}{b} = \cos \alpha \Leftrightarrow a = b \cos \alpha \text{ oraz } \frac{H}{b} = \sin \alpha \Leftrightarrow H = b \sin \alpha$$

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3} \cdot H}{2} = \frac{b^2 \cos^2 \alpha \cdot \sqrt{3} \cdot b \sin \alpha}{2} = \frac{b^3 \sqrt{3}}{2} \cdot \cos^2 \alpha \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2H}{a\sqrt{3}} = \frac{2b \sin \alpha}{\sqrt{3} \cdot b \cos \alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

10. (4 pkt) Wykres funkcji  $y = ax + b$  jest nachylony do osi  $OX$  pod kątem  $\alpha = 45^\circ$  i przechodzi przez punkt  $P = (-2, 4)$ .

a) Napisz wzór tej funkcji.

b) Sprawdź, czy do wykresu tej funkcji należy wierzchołek paraboli o równaniu  $y = -x^2 + 6x + 3$ .

c) Zilustruj w układzie współrzędnych zbiór rozwiązań nierówności  $y > ax + b$  dla  $a$  i  $b$  wyznaczonych w punkcie a).

Rozwiązanie:

a)  $y = ax + b$ , oraz  $a = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$ , skąd mamy  $y = x + b$ .

Wstawiając współrzędne punktu  $P = (-2, 4)$  do równania prostej, otrzymujemy:

$$4 = -2 + b \Leftrightarrow b = 6, \text{ czyli wzór tej funkcji ma postać: } y = x + 6.$$

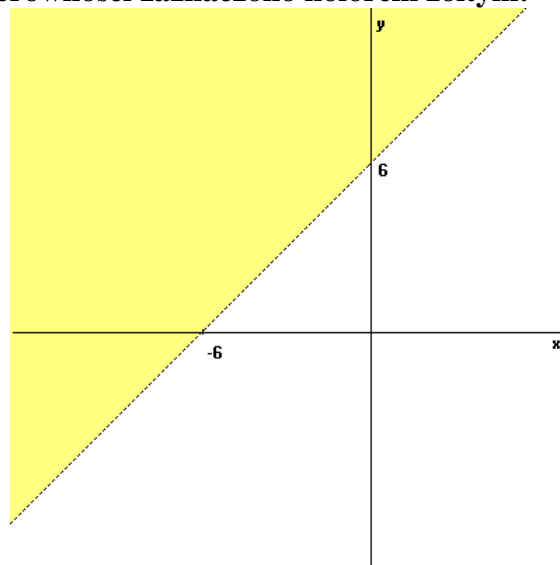
b)  $y = -x^2 + 6x + 3$

Wierzchołek paraboli:  $W = (p, q)$

$$p = \frac{-6}{2 \cdot (-1)} = 3, \quad \Delta = 36 + 12 = 48, \quad q = \frac{-48}{-4} = 12$$

$W = (3,12)$  i  $y = x + 6$  - sprawdzamy, czy współrzędne punktu  $W$  spełniają równanie prostej:  $12 \neq 3 + 6$ , czyli wierzchołek paraboli nie należy do wykresu funkcji  $y = x + 6$ .

c) Zbiór rozwiązań nierówności zaznaczono kolorem żółtym:



11. (4 pkt) Pan Kowalski pożyczył od swojego brata pewną sumę pieniędzy potrzebną na zakup nowych części do samochodu. Zobowiązał się do zwrotu pożyczki w dziesięciu ratach, z których każda była o 60 zł większa od poprzedniej. Ostatnia rata wynosiła 640 zł. Oblicz wysokość pierwszej i szóstej raty oraz kwotę pożyczoną przez pana Kowalskiego.

**Rozwiązanie:**

Kolejne raty tworzą ciąg arytmetyczny, którego różnica wynosi  $r = 60$ . Wiadomo, że  $a_{10} = 640$ , czyli  $a_1 + 9r = 640$ .

$$a_1 = 640 - 9r = 640 - 9 \cdot 60 = 640 - 540 = 100$$

Pierwsza rata wynosiła 100 zł.

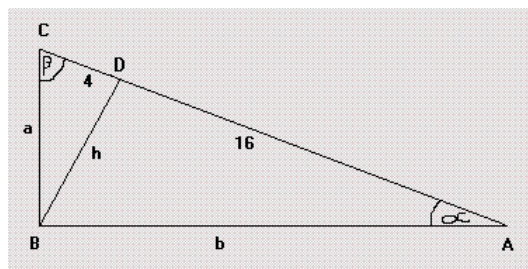
$$\text{Szósta rata to: } a_6 = a_1 + 5r = 100 + 5 \cdot 60 = 400 \text{ zł.}$$

Kwota pożyczona przez pana Kowalskiego to suma wszystkich rat:

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 5 \cdot (100 + 640) = 3700 \text{ zł.}$$

12. (5 pkt) W trójkącie prostokątnym  $ABC$  wysokość  $BD$  dzieli przeciwprostokątną  $AC$  na odcinki o długościach  $|CD|=4$  cm i  $|AD|=16$  cm. Korzystając z podobieństwa odpowiednich trójkątów, oblicz długości przyprostokątnych trójkąta  $ABC$ , pole koła wpisanego oraz pole koła opisanego na tym trójkącie.

**Rozwiązanie:**



Należy obliczyć:  $a$ ,  $b$ ,  $P_1 = \pi r^2$ ,  $P_2 = \pi R^2$ , gdzie  $r$  to promień koła wpisanego w trójkąt, a  $R$  – promień koła opisanego na trójkącie.

$\triangle BAD$  jest podobny do trójkąta  $\triangle BDC$ , gdyż  $\angle DBA = \beta$  i  $\angle DBC = \alpha$ , czyli te trójkąty mają takie same kąty. Porównując ilorazy odpowiednich boków w tych trójkątach, otrzymujemy:

$$\frac{4}{h} = \frac{h}{16} \Leftrightarrow h^2 = 64 \Leftrightarrow h = 8$$

W trójkącie  $BAD$ :

$$b^2 = h^2 + 16^2 = 8^2 + 16^2 = 8^2 \cdot 5, \text{ stąd } b = 8\sqrt{5}.$$

W trójkącie  $BDC$ :

$$a^2 = h^2 + 4^2 = 8^2 + 4^2 = 4^2 \cdot 5, \text{ stąd } a = 4\sqrt{5}.$$

Boki trójkąta mają długości:  $8\sqrt{5}$  i  $4\sqrt{5}$ .

Promień koła opisanego na trójkącie prostokątnym ma długość równą połowie długości przeciwprostokątnej, czyli  $R = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$  cm.

Pole tego koła:  $P_2 = \pi R^2 = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$  cm<sup>2</sup>.

Promień koła wpisanego w trójkąt ma długość:  $r = \frac{S}{p}$ , gdzie  $S$  – pole trójkąta  $ABC$ , a  $p$  – połowa obwodu trójkąta  $ABC$ .

$$\begin{aligned} r &= \frac{\frac{1}{2}ab}{\frac{1}{2} \cdot (a + b + 20)} = \frac{4\sqrt{5} \cdot 8\sqrt{5}}{4\sqrt{5} + 8\sqrt{5} + 20} = \frac{160}{4 \cdot (3\sqrt{5} + 5)} = \frac{40(3\sqrt{5} - 5)}{(3\sqrt{5} + 5) \cdot (3\sqrt{5} - 5)} = \\ &= \frac{40(3\sqrt{5} - 5)}{45 - 25} = 6\sqrt{5} - 10 \end{aligned}$$

Pole tego koła:  $P_1 = \pi r^2 = \pi \cdot (6\sqrt{5} - 10)^2$