O poprawianiu prac pisemnych

Problem

Egzamin maturalny z matematyki 9 maja 2005 r.
Zadanie 17.

Wykaż, bez użycia kalkulatora i tablic, że $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ jest liczbą całkowitą.
Jak ocenić takie rozwiązanie:

****

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1\right)^3}-\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-1\right)^3}=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1=2$$

Podana liczba jest liczbą całkowitą.

****

Co to jest „rozwiązanie zadania”?

Rozwiązanie zadania jest to opis przebiegu rozumowania (częścią tego opisu są obliczenia), które prowadzi do uzyskania odpowiedzi na pytanie zawarte w temacie zadania, lub wykonania zawartego tam polecenia.

W takim razie, co należy napisać w rozwiązaniu zadania?

1. **Należy opisać przebieg rozumowania w taki sposób, aby osoba, która czyta to rozwiązanie, miała wyłożone czarno na białym, w jaki sposób piszący doszedł do wyniku.**

2. **W żadnym fragmencie rozwiązania nie może być takiej sytuacji, że czytający musiałby się domyślać, skąd dany zapis się bierze.**

3. **Jeżeli dany zapis wynika bezpośrednio z poprzedniego – komentarz jest zbędny.**
   Jeżeli nie – należy napisać stosowne wyjaśnienia (należy wyjaśnić jaki jest związek z poprzednimi zapisami, całym zadaniem itp., rozpocząć dalsze obliczenia, używając zapisanego wcześniej wzoru itp.).

4. **Obliczenia powinny być pełne, tzn. można opuszczać fragmenty, które można wykonać w pamięci (tu kryteria należałoby sprecyzować, bo umiejętności różnych ludzi są różne - można przyjąć za odnośnik umiejętności rachunkowe przeciętnego ucznia, powiedzmy o ocenie 3+, a na maturze rozszerzonej – dobrego ucznia).**

Omówmy teraz na przykładach, jakie zastosowania wzorów skróconego mnożenia uczeń jest w stanie wykonać w pamięci, a jakich nie.

1. $\left(3-\sqrt{2}\right)^2 = 9-6\sqrt{2}+2$ **- ten wynik przeciętny uczeń powinien podać bez bardziej szczegółowych obliczeń.**
2. $\left(3-\sqrt{2}\right)^2 = 11-6\sqrt{2}$ **- ten wynik dobry uczeń mógłby podać bez bardziej szczegółowych obliczeń, ale przeciętny raczej nie (ale nie na pewno, więc takie obliczenia należy uznać za kompletne).**
3. $16+8x+x^2=(4+x)^2$ **- ten wynik przeciętny uczeń mógłby podać bez bardziej szczegółowych obliczeń.**
4. $18+8\sqrt{2} = \left(4+\sqrt{2}\right)^2$ **- ten wynik dobry uczeń mógłby podać bez bardziej szczegółowych obliczeń (choć nie każdy), ale przeciętny na pewno nie.**
5. $(2-x)^3 = 8-12x+6x^2-x^3$ **- ten wynik dobry uczeń mógłby podać bez bardziej szczegółowych obliczeń, ale przeciętny raczej nie (ale nie na pewno, więc takie obliczenia można uznać za kompletne).**
6. $\left(\sqrt{2}+1\right)^3 = 2\sqrt{2}+6+3\sqrt{2}+1$ **- ten wynik dobry uczeń mógłby podać bez bardziej szczegółowych obliczeń, ale przeciętny na pewno nie.**
7. $5\sqrt{2}+7=\left(\sqrt{2}+1\right)^3$ **- tego wyniku dobry uczeń nie poda bez szczegółowych obliczeń. Brak obliczeń na 99% wskazuje, że albo rozwiązujący nie przepisał obliczeń wykonanych na brudno, albo podał wynik uzyskany – powiedzmy - w sposób niezbyt legalny.**
8. $2\sqrt{2}+6+3\sqrt{2}+1=\left(\sqrt{2}+1\right)^3$ **- tego wyniku dobry uczeń raczej nie poda bez szczegółowych obliczeń (ale nie na pewno, więc takie obliczenia można uznać za kompletne).**
9. $2\sqrt{2}+6+3\sqrt{2}+1=\left(\sqrt{2}\right)^3+3\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2+3\cdot\sqrt{2}+1=\left(\sqrt{2}+1\right)^3$ **- takie obliczenia wykona statystyczny, dobry uczeń.**

Przykłady można mnożyć. Zawsze (nie da się wszystkiego uszczegóławiać bez końca) pozostanie tu pewien margines interpretacji, choć już niewielki.

W przytoczonym problemie, pamięciowe wykorzystanie wzorów na sześcian sumy i różnicy jest praktycznie wykonalne tylko dla ucznia, który (w mojej ocenie) zasługuje na ocenę celującą.
Takie rozwiązanie byłoby uznane na konkursie matematycznym, gdzie ocenia się, czy rozwiązanie jest poprawne, a nie przywiązuje się wagi do szczegółowych obliczeń.
Przypomnijmy, że w podanym problemie na 99% albo rozwiązujący nie przepisał obliczeń wykonanych na brudno, albo podał wynik uzyskany w sposób niezbyt legalny.

Jak więc należałoby ocenić przedstawione rozwiązanie zadania?
Należy rozpatrzyć dwie sytuacje:
1. **Zadanie rozwiązane zostało w szkole, na sprawdzianie.**
2. **Zadanie rozwiązane zostało na egzaminie maturalnym.**

W pierwszej sytuacji zaglądamy do brudnopisu, który zazwyczaj ma być umieszczony na ostatniej stronie. Jeżeli w brudnopisie dokładne obliczenia są, dajemy w zależności od uznania 50-75% (w końcu te obliczenia to esencja zadania!).
Jeśli ich nie ma – 0% (ewidentna, niesamodzielna praca).

W drugiej sytuacji mamy poważny problem: brudnopis nie podlega ocenie!
Mamy możliwe dwie potencjalne przyczyny. Nie wiemy, która zachodzi w rzeczywistości (zakładam tu, że jest to sytuacja jednostkowa, bo jeżeli wystąpiła w całej grupie zdających w tej samej sali, to nawet może dojść do unieważnienia egzaminu!).
Dlatego powinno się tu przyznać 50% punktów.

Praktyczne zastosowanie zasad poprawiania.
Przykład „z życia wzięty”.

Swego czasu brałem udział w szkoleniowej konferencji metodycznej, jeszcze w czasach starej matury.
Uczestnicy dostali kopię autentycznego rozwiązania jednego zadania, kryteria oceny tego zadania i mieli samodzielnie poprawić pracę.
W dalszej części przewidziano porównanie i wyciągnięcie wniosków.
Proszę sobie wyobrazić, że na 10 punktów do zdobycia, przyznawano za zadanie od 5 do 9 (!) punktów.
Z tego zadania zapamiętałem taki „kwiatek”:

$-x^2-3x+4=0$

$\Delta=-3^2-4\cdot(-1)\cdot4$

$\Delta=9+16$

$\Delta=25\ ,\ \sqrt{\Delta}=5$

itd.

Przyjmijmy, że za rozwiązanie tego równania można było uzyskać 2 punkty.
Niektórzy traktowali występujące błędy jako zwyczajne przeoczenie i przyznawali nawet komplet punktów.
Tymczasem sprawa jest prosta: zapisy mają wynikać z poprzednich!
$\Delta=-3^2-4\cdot(-1)\cdot4$ **- błąd 1 – błędne wykorzystanie wzoru, piszący nie umie podstawić do wzoru liczby** -3**. Zapis nie wynika z odpowiedniego wzoru i wartości** -3**.**
$\Delta=9+16$ **- błąd 2 – błąd rachunkowy (zapis nie wynika z poprzedniego) - piszący nie wie, że** $-3^2=-9$**.**

Ponieważ obowiązywała zasada, że w przypadku błędu rachunkowego, można przyznać max. 50 % punktów za dany fragment, a tu dodatkowo mamy jeszcze jeden błąd, więc przyznanie 25%, czyli 0,5 punktu, to najwyższa możliwa nota za ten fragment.

Podsumowanie.

Nie wiem, czy Pani/Pan, czytająca ten tekst odniosła wrażenie, że jak się trochę pogłówkuje, to można ustalić uniwersalne zasady poprawy prac pisemnych.
Jeżeli tak, to jest mi bardzo miło - jesteśmy w jednej drużynie.

Nasuwa się pytanie: jeżeli można ustalić uniwersalne zasady poprawy prac pisemnych, to dlaczego przed poprawą każdego egzaminu maturalnego OKE instruuje egzaminatorów jak poprawiać poszczególne zadania?
Ile punktów dajemy, jeżeli w zadaniu x, ktoś napisze tak, a ile jeżeli tak itd.

I najważniejsze: dlaczego kochane władze oświatowe takich uniwersalnych zasad, chociażby tylko w odniesieniu do egzaminu maturalnego nie ustalą?!

Myślę, że możliwe powody są co najmniej dwa:

- **można wykonywać różne manewry. Jeżeli matura wypadnie słabo (a władzuchna tego nie lubi), to się przyjmie takie kryteria, żeby zawyżyć oceny...**
- **jeżeli Ona ustaliłaby te kryteria (i parę innych rzeczy, które można ustalić raz a dobrze, a nie polegać na nieustannej opiece urzędników oświatowych), to po co nam wtedy będą potrzebne te całe OKE, te szkolenia i takie tam...**
  Może ktoś pomyśleć, że Ona jest niepotrzebna!
  Fachowcy od „szkoleń” też muszą zarobić, a biorą niemało!
  A może tylko ja jestem taki złośliwy, a Ona po prostu na to nie wpadła?
  Sam już nie wiem...Oceńcie sami.

Zachęcam do zwracania się do mnie z problemami, z jakimi spotykają się Państwo w swojej pracy.
Jeżeli znają Państwo rozwiązanie (lub choćby sugestię) problemów, z którymi borykają się inni - również proszę o kontakt. Wasze przemyślenia opublikujemy.

Pozdrawiam serdecznie.
Autor opracowania: Tadeusz Socha

Kontakt: tadesor@gmail.com