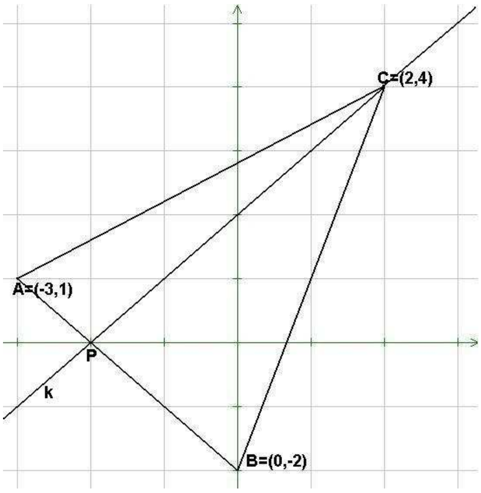
Jak liczyć pole trójkąta w układzie współrzędnych?

Najczęściej stosowane są cztery metody. Omówimy je na przykładzie.

METODA I



Plan:

1. Liczymy $|AB|$
2. Wyznaczamy równanie prostej k, prostopadłej do prostej AB
3. Wyznaczamy współrzędne punktu P
4. Liczymy $|PC|$
5. Liczymy pole trójkąta: $P=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|PC|$

Obliczenia:

$|AB|=\sqrt{(-3)^2+(1+2)^2}=\sqrt{9\cdot 2}=3\sqrt{2}$

Prosta AB (za pomocą równania prostej przechodzącej przez dwa dane punkty):

$$y+2=\frac{1+2}{-3}\cdot x$$

$y=-x-2$

Prosta k jest prostopadła do prostej AB, więc ma równanie: $y=x+b$

Punkt C należy do prostej k, czyli $4=2+b \quad \Leftrightarrow \quad b=2$

Ostatecznie prosta k ma równanie: $y=x+2$

Liczymy współrzędne punktu P, który jest punktem przecięcia prostych AB i k:

$$\begin{cases} y=-x-2 \\ y=x+2 \end{cases} \quad |+$$

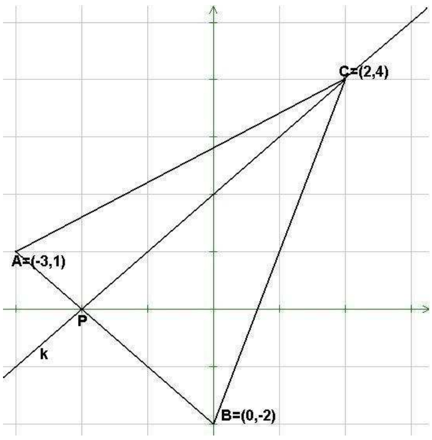
$y=0$, $x=-2$, czyli $P=(-2,0)$.

$|PC|=\sqrt{(2+2)^2+4^2}=\sqrt{16\cdot 2}=4\sqrt{2}$

Pole trójkąta:

$$P=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|PC|=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}=12$$

METODA II



Plan:

1. Liczymy $|AB|$
2. Wyznaczamy równanie prostej AB
3. Liczymy wysokość trójkąta $|PC|$, korzystając ze wzoru na odległość punktu (tu: C) od prostej (tu: AB)
4. Liczymy pole trójkąta: $P=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|PC|$

Obliczenia:

$|AB| = \sqrt{(-3)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$

Prosta AB (za pomocą równania prostej przechodzącej przez dwa dane punkty):

$y + 2 = \frac{1+2}{-3} \cdot x$

$y = -x - 2$

Równanie ogólne prostej AB: $x + y + 2 = 0$

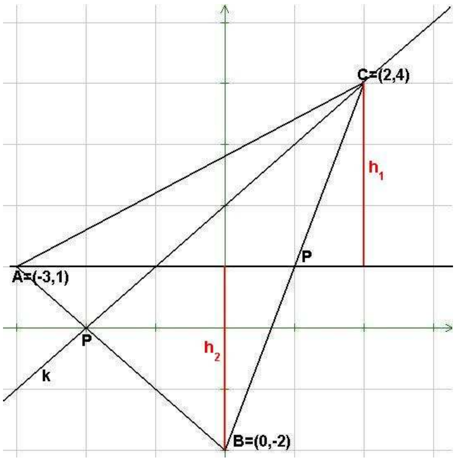
$|PC|$ jest odległością punktu C od prostej AB:

$|PC| = \frac{|2+4+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

Pole trójkąta:

$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |PC| = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 12$

METODA III



Plan:

1. Liczymy równanie prostej BC
2. Wyznaczamy współrzędne punktu P
3. Pole trójkąta liczymy jako sumę pól trójkątów APB i APC.

Obliczenia:

Prosta BC (za pomocą równania prostej przechodzącej przez dwa dane punkty):

$y + 2 = \frac{4+2}{2-0} \cdot x$

$y = 3x - 2$

Dla $y = 1$ mamy: $1 = 3x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$

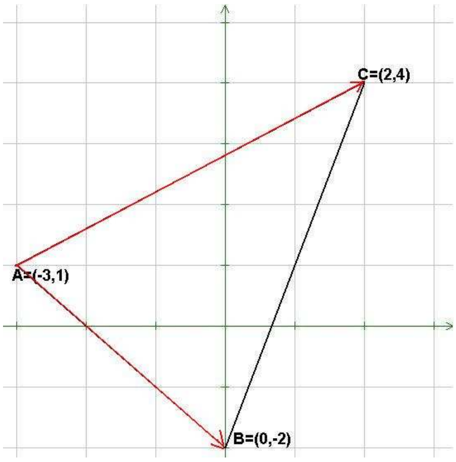
Współrzędne punktu P: $P = (1, 1)$

$|AP| = 4\,, \quad h_1 = 3\,, \quad h_2 = 3$

Pole trójkąta:

$P = \frac{1}{2} \cdot |AP| \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot |AP| \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 12$

METODA IV



Plan:
Stosujemy wzór:
$$P = \frac{1}{2} \cdot \left| d\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \right|$$
gdzie $d\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ jest wyznacznikiem pary wektorów $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$:
$$\overrightarrow{AB} = [a, b]\,,\ \overrightarrow{AC} = [p, q]$$
$$d\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix} = a \cdot q - b \cdot p$$

Obliczenia:
$$\overrightarrow{AB} = [0 + 3, -2 - 1] = [3, -3]$$
$$\overrightarrow{AC} = [2 + 3, 4 - 1] = [5, 3]$$
$$d\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 5 \cdot (-3) = 24$$
Pole trójkąta:
$$P = \frac{1}{2} \cdot \left| d\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \right| = \frac{1}{2} \cdot |24| = 12$$
****

Która z tych metod jest najlepsza?
Ta, która prowadzi do celu jak najmniejszym kosztem (mało obliczeń).
Czytelnik może rozwiązać to zadanie dla mniej przyjaznych danych, np. $A = \left(-3, 4\frac{1}{2}\right), B = \left(-\frac{1}{4}, 12\right), C = \left(7\frac{1}{3}, 4\right)$.
Łatwo przekona się, że skuteczność podanych metod jest odwrotna do kolejności ich przedstawienia (choć metody II i III mają zbliżoną „pracochłonność”).
Najlepszą metodą jest metoda IV.
Często w praktyce nauki szkolnej nie wspomina się o wyznaczniku pary wektorów.
Czy wobec tego pisząc egzamin maturalny nie należałoby powstrzymać się przed użyciem tej metody?
Absolutnie nie! To, co znajduje się w szkolnych podręcznikach nie zawsze jest „kompatybilne” z tym, czego oczekuje od maturzysty CKE.
W tablicach matematycznych, które otrzymuje od komisji każdy maturzysta zdający egzamin maturalny z matematyki mamy na stronie 7 w dziale „Geometria analityczna” taki oto wzór:
Pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B), C = (x_C, y_C)$ dane jest wzorem: $P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)\right|$
Cóż to za dziwny wzór? Czy jest on powszechnie podawany w szkole? Nie jest.
Jest to wzór na pole trójkąta z użyciem wyznacznika pary wektorów, jednak bez formalnego powołania się na fakt, że wyrażenie pod wartością bezwzględną jest wyznacznikiem pary wektorów $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
W rozwiązaniach wszystkich zadań, w których trzeba obliczyć pole trójkąta w układzie współrzędnych, i które są dostępne na stronie www.maturzysta.info, stosujemy metodę IV. Wzór na pole trójkąta został podany z użyciem pojęcia wyznacznika pary wektorów, gdyż w tej postaci o wiele łatwiej go zapamiętać.