

Matura 14 V 2007.

Zadanie o paraboli i trójkącie równobocznym.

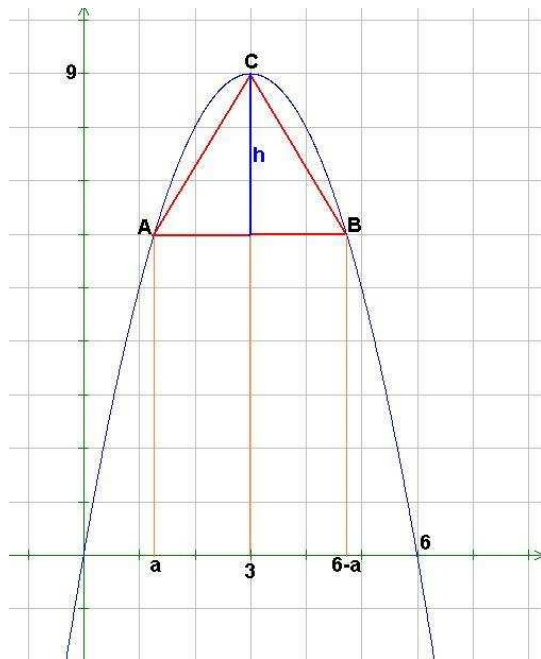
Zadanie, które okazało się za trudne dla wielu maturzystów na maturze:

Zadanie 5. (7 pkt)

Wierzchołki trójkąta równobocznego ABC są punktami paraboli $y = -x^2 + 6x$. Punkt C jest jej wierzchołkiem, a bok AB jest równoległy do osi Ox . Sporządź rysunek w układzie współrzędnych i wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

Przykładowe rozwiązanie przedstawione przez CKE jest nieco pracochłonne.

Zadanie można rozwiązać sposobem dającym prostsze obliczenia i chyba bardziej „eleganckim”:



$$y = -x^2 + 6x$$

$$y = -x(x - 6)$$

Miejsca zerowe: 0 i 6

Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli: 3

Druga współrzędna wierzchołka paraboli:

$$y(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 = 9$$

Pierwszą współrzędną punktu A oznaczamy a , $a \in (0, 3)$

Pierwszą współrzędną punktu B wynosi $6 - a$ ze względu na symetrię wykresu względem prostej $x = 3$. Punkty A i B należą do paraboli, więc mają przy tych oznaczeniach współrzędne:
 $A = (a, -a^2 + 6a)$, $B = (6 - a, -a^2 + 6a)$

$$|AB| = 6 - a - a = 6 - 2a$$

$$h = 9 - (-a^2 + 6a) = a^2 - 6a + 9 = (a - 3)^2$$

W trójkącie równobocznym zachodzi:

$$h = \frac{|AB| \cdot \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2h = |AB| \cdot \sqrt{3}$$

Otrzymaliśmy:

$$2(a - 3)^2 = \sqrt{3} \cdot (6 - 2a)$$

$$2(a - 3)^2 = -2\sqrt{3}(a - 3)$$

$$(a - 3)^2 + \sqrt{3}(a - 3) = 0$$

$$(a - 3)(a - 3 + \sqrt{3}) = 0$$

$$a = 3 \text{ lub } a = 3 - \sqrt{3}$$

$$a = 3 \text{ odrzucamy, bo } a \in (0, 3).$$

$$\text{Mamy: } a = 3 - \sqrt{3} \text{ , } 6 - a = 6 - (3 - \sqrt{3}) = 3 + \sqrt{3}$$

$$-a^2 + 6a = a(6 - a) = (3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3}) = 9 - 3 = 6$$

Współrzędne wierzchołków tego trójkąta:

$$A = (a, -a^2 + 6a) = (3 - \sqrt{3}, 6) \text{ , } B = (6 - a, -a^2 + 6a) = (3 + \sqrt{3}, 6) \text{ , } C = (3, 9)$$