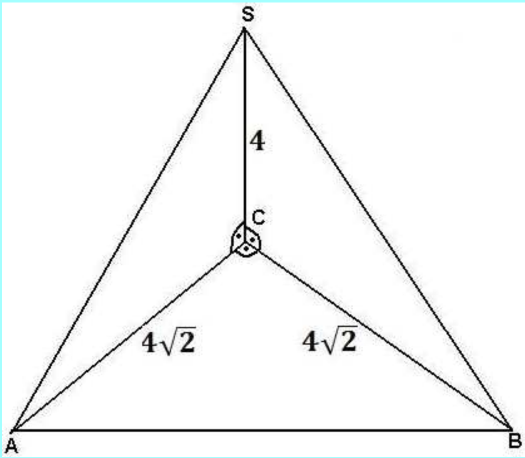
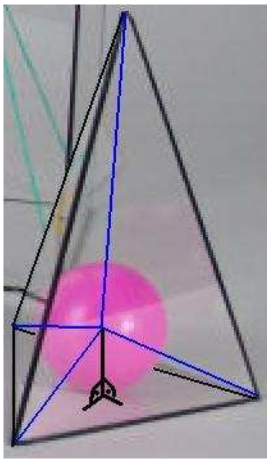
Kula wpisana w ostrosłup

ZADANIE:
Oblicz długość promienia kuli wpisanej w ostrosłup ABCS wykorzystując dane przedstawione na rysunku.



Wyobraźmy sobie kulę wpisaną w ostrosłup:
Taka kula jest oczywiście styczna do wszystkich ścian ostrosłupa.

Jeżeli z punktów styczności poprowadzimy promienie, to będą one prostopadłe do ścian ostrosłupa.



Połączmy teraz środek kuli ze wszystkimi wierzchołkami ostrosłupa. W ten sposób podzielimy ostrosłup na cztery ostrosłupy, których podstawami są ściany wyjściowego ostrosłupa, a wysokościami – promienie kuli.

Oznaczmy:
P_1, P_2, P_3, P_4 - pola powierzchni ścian ostrosłupa,
r – długość promienia kuli
Obliczymy objętość ostrosłupa, jako sumę objętości czterech ostrosłupów powstałych w wyniku opisanego wyżej podziału:

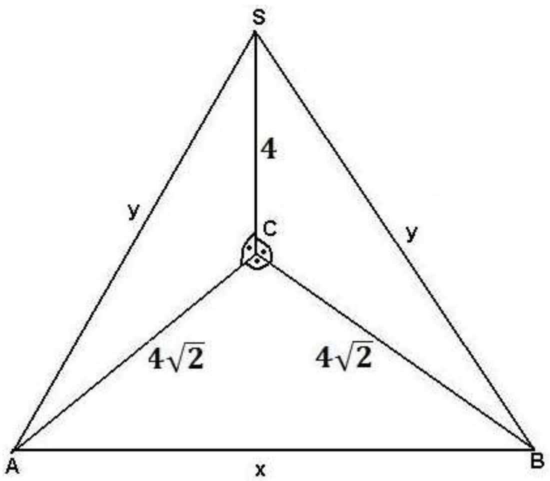
$$V=\frac{1}{3}P_1\cdot r+\frac{1}{3}P_2\cdot r+\frac{1}{3}P_3\cdot r+\frac{1}{3}P_4\cdot r=\frac{1}{3}r\cdot(P_1+P_2+P_3+P_4)$$

Otrzymaliśmy wzór:

$$V=\frac{1}{3}r\cdot P$$

gdzie:
V - objętość ostrosłupa
r - długość promienia kuli wpisanej w ostrosłup
P – pole powierzchni ostrosłupa

Wracamy teraz do zadania.



$$x^2=(4\sqrt{2})^2+(4\sqrt{2})^2$$
$$x^2=16\cdot2+16\cdot2=64$$
$$x=8$$

$$y^2=(4\sqrt{2})^2+4^2$$
$$y^2=16\cdot2+16=16\cdot3$$
$$y=4\sqrt{3}$$

Objętość ostrosłupa:

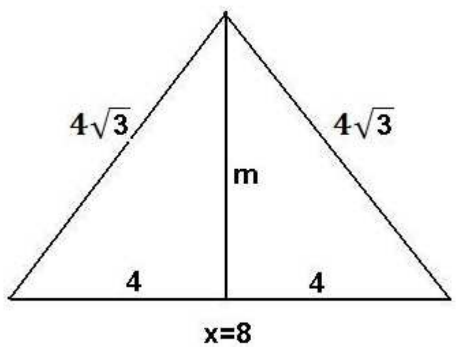
$$V=\frac{1}{3}\cdot P_{\Delta ABC}\cdot|CS|=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(4\sqrt{2})^2\cdot4=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot16\cdot2\cdot4=\frac{64}{3}$$

Wiemy, że objętość ostrosłupa można też obliczyć za pomocą wzoru $V = \frac{1}{3} r \cdot P$

$$V = \frac{1}{3} r \cdot (P_{\Delta ABC} + P_{\Delta ABS} + P_{\Delta BCS} + P_{\Delta ACS})$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left(4\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 2 = 16$$

$P_{\Delta ABS}$:



$$m^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 - 4^2 = 16 \cdot 3 - 16 = 16 \cdot 2$$

$$m = 4\sqrt{2}$$

$$P_{\Delta ABS} = 4m = 4 \cdot 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$$

$$P_{\Delta BCS} = P_{\Delta ACS} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4 = 8\sqrt{2}$$

$$V = \frac{1}{3} r \cdot (P_{\Delta ABC} + P_{\Delta ABS} + P_{\Delta BCS} + P_{\Delta ACS})$$

$$V = \frac{1}{3} r \cdot \left(16 + 16\sqrt{2} + 8\sqrt{2} + 8\sqrt{2}\right)$$

$$V = \frac{1}{3} r \cdot \left(16 + 32\sqrt{2}\right)$$

$$V = \frac{16}{3} r \cdot \left(1 + 2\sqrt{2}\right)$$

Obliczyliśmy wcześniej: $V = \frac{64}{3}$

$$\frac{64}{3} = \frac{16}{3} r \cdot \left(1 + 2\sqrt{2}\right)$$

$$4 = r \cdot \left(1 + 2\sqrt{2}\right)$$

$$r = \frac{4}{1 + 2\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot \left(2\sqrt{2} - 1\right)}{\left(2\sqrt{2} + 1\right) \cdot \left(2\sqrt{2} - 1\right)} = \frac{4 \cdot \left(2\sqrt{2} - 1\right)}{8 - 1} = \frac{4}{7}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$$