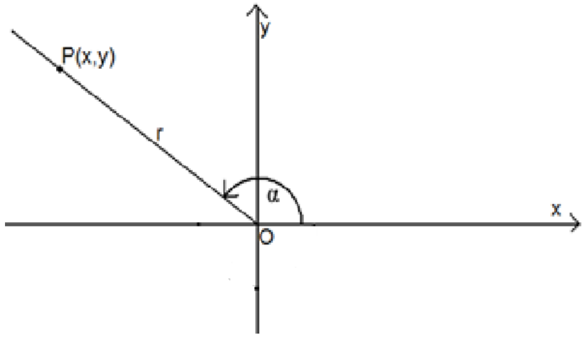
Kąt wpisany w prostokątny układ współrzędnych



$\overrightarrow{OX}$ - **początkowe (pierwsze) ramię kąta**
$\overrightarrow{OP}$ - **końcowe (drugie) ramię kąta**

Obrót jest dokonywany w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Przyjmujemy, że miara kąta jest równa ilości stopni, o które dokonano obrotu. Będziemy mówić o kątach z przedziału $\langle \mathbf{0}°, \mathbf{180}° \rangle$.

$\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{OP}| = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2} > 0$ – **promień wodzący** punktu $\boldsymbol{P}$.

Punkt $\boldsymbol{P}$ jest dowolnym punktem leżącym na drugim ramieniu kąta.

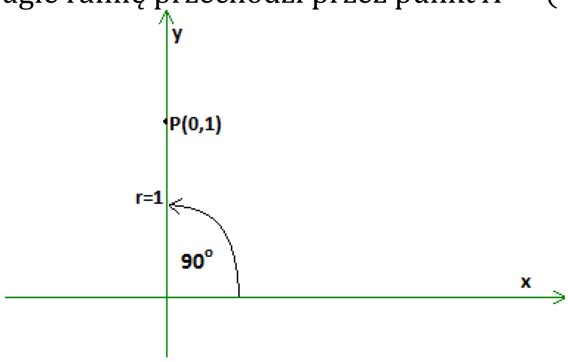
Definicje funkcji trygonometrycznych kąta wpisanego w układ współrzędnych:

$\sin\alpha = \frac{y}{r}$	$\cos\alpha = \frac{x}{r}$	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$	$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$

W przypadku funkcji tangens musi być spełniony warunek $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$.
W przypadku funkcji cotangens musi być spełniony warunek $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$.

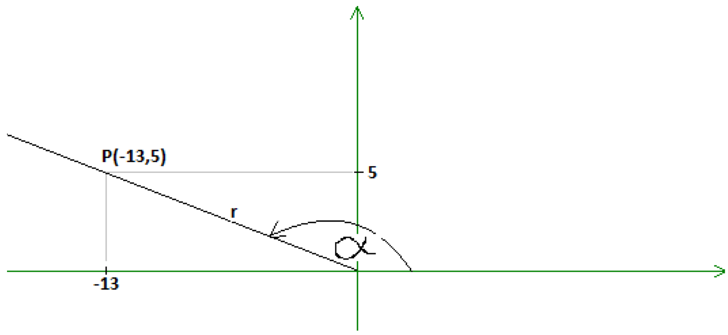
Dla przykładu obliczymy funkcje trygonometryczne

a) kąta $\mathbf{90}°$,
b) kąta, którego drugie ramię przechodzi przez punkt $A = (-13, 5)$



Mogliśmy wybrać dowolny punkt $\boldsymbol{P}$ na końcowym ramieniu kąta – wybraliśmy punkt $\boldsymbol{P}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$.

$\sin 90° = \frac{1}{1} = 1$, $\quad \cos 90° = \frac{0}{1} = 0$, $\quad \operatorname{tg} 90°$ nie istnieje, bo $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, $\quad \operatorname{ctg} 90° = \frac{0}{1} = 0$



$$\boldsymbol{r = \sqrt{(-13)^2 + 5^2} = \sqrt{169 + 25} = \sqrt{194}}$$

$$\boldsymbol{\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{194}}\ , \quad \cos\alpha = -\frac{13}{\sqrt{194}}\ , \quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{13}\ , \quad \operatorname{ctg}\alpha = -\frac{13}{5}}$$

➢ Wzory redukcyjne

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$
$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$
$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$

Pierwsza czwórka wzorów to stwierdzenie faktu, że jeżeli suma miar dwóch kątów wynosi $90°$ $(\alpha + (90° - \alpha) = 90°)$, to sinus jednego kąta równa się cosinusowi drugiego kąta i tangens jednego kąta równa się cotangensowi drugiego kąta, np.
$\sin 20° = \cos 70° \quad i \quad \cos 20° = \sin 70°$

Druga czwórka wzorów najczęściej służy do obliczania wartości funkcji trygonometrycznych kątów rozwartych. Dla przykładu obliczymy funkcje trygonometryczne kąta o mierze $120°$:

$$\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Najpierw wykorzystano: $120° = 180° - 60°$.
Następnie zastosowano wzór: $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$.

$$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

Tutaj zastosowano wzór: $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

$$\operatorname{tg} 120° = \operatorname{tg}(180° - 60°) = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}$$

Tutaj zastosowano wzór: $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$