Dziedzina funkcji $y = x^{\frac{1}{3}}$
Problem metodyczny nadesłany przez nauczyciela

Jeżeli funkcja zadana jest wzorem $y = x^{\frac{1}{3}}$, to jej dziedziną jest zbiór $\mathbf{R}_+ \cup \{0\}$.
W przypadku funkcji $y = \sqrt[3]{x}$ dziedziną jest R (w ten sposób wyświetlają jej wykres np. kalkulatory, ale już program Derive nie, bo też podaje w dziedzinie $\mathbf{R}_+ \cup \{0\}$).
Czy należy uczniom zalecić stosowanie ograniczonej dziedziny w przypadku pierwiastków stopni nieparzystych? Inaczej robi się zamieszanie, bo jak np. ustalić dziedzinę funkcji $\mathbf{f(x) = |x-1|\sqrt[3]{x}}$ i sprawdzić jej różniczkowalność w punkcie $\mathbf{x_0 = 0}$?

Przede wszystkim uwaga: $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ i $f(x) = \sqrt[3]{x}$ to jest ta sama funkcja.
Encyklopedyczne poradniki matematyczne podają jako dziedzinę zbiór R.

Nie spotkałem się z jednoznaczną wskazówką jaką dziedzinę należy przyjmować.
Prawdopodobnie wynika to z faktu, że problem występuje sporadycznie – rzadkością są zadania związane z pierwiastkami o nieparzystych stopniach, w których jest to istotne.

Zetknąłem się jednak kilkakrotnie z zadaniami, których autorzy przyjmowali, że dziedziną funkcji $f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ jest przedział $\langle 0, \infty)$.
Przykładowe takie zadanie pochodzące ze zbioru wydawnictwa Aksjomat:
„Rozwiąż graficznie nierówność: $x^{\frac{1}{3}} + x^2 \leq 2$ ”.
Podany w odpowiedziach wynik został zilustrowany odpowiednim rysunkiem, z którego wynika, ze dziedziną nierówności jest przedział $\langle 0, \infty)$.

Zasadne jest więc chyba stwierdzenie, że taka zawężona dziedzina funkcji $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ dla $n \epsilon \{3, 5, 7, \dots\}$ jest powszechnie przyjmowana w nauczaniu matematyki w szkole średniej.

Proponuję przyjęcie takiego praktycznego rozwiązania:

- Na poziomie podstawowym tłumaczymy, że $\sqrt[3]{x}$, czyli $x^{\frac{1}{3}}$ ma dziedzinę $\langle 0, \infty)$.
  Przeciętny uczeń i tak powtarza jak mantrę, że pierwiastka z liczby ujemnej nie można obliczyć. Niech już tak mu zostanie. Rozpatrywanie niuansów teoretycznych nie jest na tym poziomie potrzebne.
- Na poziomie rozszerzonym też radziłbym podawać taką definicję.
  Przyczyna jest praktyczna.
  Nasi uczniowie zdają maturę. Przyjęcie zawężonej dziedziny nie zostanie zakwestionowane, a zazwyczaj rozwiązanie zadania przy takim ustaleniu jest prostsze (proszę spróbować rozwiązać podaną wcześniej przykładową nierówność przy założeniu, że jej dziedziną jest R!).

  O tym, że można przyjąć rozszerzoną dziedzinę funkcji $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ dla $n \epsilon \{3, 5, 7, \dots\}$, i że taka definicja jest przyjmowana na wyższym poziomie nauczania matematyki należy oczywiście powiedzieć.

  Sądzę jednak, że zadania z zastosowaniem takiej definicji należałoby zaserwować jedynie uczniom zdolniejszym, np. na fakultecie.