Tematy zadań – sprawdziany klasa III poziom rozszerzony

Funkcja potęgowa, wykładnicza i logarytmiczna

Sprawdzian 1

1. a) Dla jakiej wartości parametru m wykresy funkcji $f(x)=2^{x+m}$ oraz $g(x)=2^{3x-m}$ przecinają się w punkcie o odciętej 1?
   b) Dla znalezionej wartości parametru m naszkicuj wykresy obu funkcji we wspólnym układzie współrzędnych.
2. Rozwiąż:
   a) równanie $3^x+6\cdot 3^{\frac{x}{2}}=27$,
   b) nierówność $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{3}{x-2}}\geq\frac{9}{25}$
3. Rozwiąż nierówność: $\sqrt{(1-x)(x-3)}>x-2$
4. Dla jakich wartości parametru $m\in R$, równanie $2^x+2^{x-1}+2^{x-2}+...=2^{2x-1}+m$ ma tylko jedno rozwiązanie?
5. Wykaż, że $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ jest liczbą naturalną.

Sprawdzian 2

1. Rozwiąż równania:
   a) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+2}\cdot\left(\frac{25}{9}\right)^{-2x+3}=(0{,}6)^{x^2}$
   b) $3^{3x}-3^{2x}-9\cdot 3^x+9=0$.
2. Wyznacz zbiór A\B, jeśli:
   $A=\left\{x: x\in C \wedge 3^{|x-2|}\leq 3\sqrt{3}\right\}$, $B=\left\{x: x\in R\wedge 6^x+72>8\cdot 3^x+9\cdot 2^x\right\}$
3. Wyznacz zbiór A\B, jeśli:
   $A=\left\{x: x\in C \wedge 3^{|x-2|}\leq 3\sqrt{3}\right\}$, $B=\left\{x: x\in R\wedge 6^x+72>8\cdot 3^x+9\cdot 2^x\right\}$
4. Dla jakich wartości parametru m, $m\in R$, równanie $49^x+(1-2m)\cdot 7^x+9=0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste?
5. Oblicz wartość sumy 2^x+2^{-x}, wiedząc, że $4^x+4^{-x}=23$.

Sprawdzian 3

1. Uporządkuj malejąco następujące liczby:
   $a=\log_5 7\cdot\log_7 65-\log_5 13$, $b=\log_{\frac{1}{3}} 27\sqrt[3]{9}$, $c=2^{\log_4 25-1}$, $d=\frac{1}{2}\log_3 2+\log_3 2\sqrt{2}$
2. Rozwiąż:
   a) równanie: $\frac{\log(25-x^2)}{\log(5-x)}=3$
   b) nierówność: $\log_{\frac{1}{3}}(x+1)<\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{6}{x-4}\right)$
3. Dla jakich $x\in R$, liczby $\log 2, \log(3^x-3), \log(3^x+9)$ w podanej kolejności, tworzą ciąg arytmetyczny? Wyznacz różnicę tego ciągu.
4. Zaznacz zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne x,y spełniają nierówność:
   $\log_y(x^2-y)<1+\log_y 2$

5. Rozwiąż układ równań: $\begin{cases} \log_y x = 2 - \log_x y \\ x^2 + 2^{\log_2 y} = 12 \end{cases}$

Sprawdzian 4

1. W prostokątnym układzie współrzędnych zaznacz zbiór tych punktów płaszczyzny, których współrzędne x,y spełniają warunek:
   $(\log_2 x)(\log_2 y) + 2 = (\log_2 xy^2)$
2. Rozwiąż równania:
   a) $2\log_x 2 \cdot \log_{4x} 2 = \log_{8\sqrt{x}} 2$
   b) ; $\log_3 \sqrt{x-2} + \frac{1}{2}\log_3(x-3) = \frac{1}{2} + \log_3 2$
3. Rozwiąż graficznie nierówność: $\log_2|x-1| > -x^2 + 2x$.
4. Rozwiąż nierówność: $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(2^{x+2} - 4^x\right) \geq -2$.
5. Ciąg (a_n) określony jest wzorem rekurencyjnym: $a_1 = \sqrt{3}$, $a_{n+1} = \left(\sqrt{3}\right)^{\log_3 a_n}$.
   Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)$.

Sprawdzian 5

1. W prostokątnym układzie współrzędnych przedstaw zbiór tych wszystkich punktów, których współrzędne x,y spełniają warunek:
   $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} - \left(\frac{2}{3}\right)^{y-x} = \frac{5}{6} \quad \wedge \quad xy - 2y \leq 4$
2. Wyznacz dziedzinę funkcji: $f(x) = \sqrt{3^{\log_{\frac{1}{3}}(x+2)} - \frac{1}{9}}$.
3. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 2^{|x+2|}$, a następnie na jego podstawie zbadaj liczbę rozwiązań równania $2^{|x+2|} = 3 - 2m$ w zależności od wartości parametru m $(m \in R)$.
4. Rozwiąż równania:
   a) $\log_2\left(12 - 2^x\right) = 5 - x$
   b) $\frac{\log_3(x+5)}{\log_3(x-1)} = 2$
5. Udowodnij, że jeżeli ciąg (a,b,c) jest ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich, to ciąg $(\log a, \log b, \log c)$ jest ciągiem arytmetycznym.

Trygonometria

Sprawdzian 1

1. a) Wiedząc, że $\alpha \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, $\beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, oraz $\sin\alpha = -\frac{1}{4}$ i $\cos\beta = -\frac{3}{4}$, oblicz $\cos(\alpha - \beta)$.
   b) Oblicz wartość wyrażenia: $\frac{\sin 10^0 \cos 20^0 + \cos 10^0 \sin 20^0}{\cos 19^0 \cos 11^0 - \sin 19^0 \sin 11^0}$.
2. Sprawdź, czy prawdziwa jest następująca tożsamość, podaj konieczne założenia:
   $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{1 + \cos\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$
3. a) Wyznacz zbiór wartości funkcji $y = \cos x + \sin x - 2$, $x \in R$.

b) Narysuj wykres funkcji: $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$, $x\in(-2\pi,2\pi)$

4. Rozwiąż równanie $\sin 3x+\sin x=4\cos^3 x$.
5. Rozwiąż równanie: $\log_{0,5\cos 2x}\sin x=\frac{1}{2}$.

Sprawdzian 2

1. Oblicz $\sin\left(2\alpha+\frac{5}{4}\pi\right)$, jeśli $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}$ i $\alpha\in\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$.
2. Rozwiąż równania:
   a) $2\cos^2 3x+\cos 3x-1=0$
   b) $\sin 2x=\cos x-\cos 3x$
3. Wykaż, że $\sin 10^0\cdot\sin 30^0\cdot\sin 50^0\cdot\sin 70^0=\frac{1}{16}$.
4. Dla jakich wartości parametru m $(m\in R)$, równanie $\sin^4 x+\cos^4 x=m^2-3$ ma rozwiązanie?
5. Oblicz $(1+\operatorname{tg}\alpha)\cdot(1+\operatorname{tg}\beta)$, jeśli $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

Sprawdzian 1

1. Ile różnych słów (mających sens lub nie) można utworzyć, przestawiając litery w wyrazie RENEGOCJACJE? Odpowiedź uzasadnij.
2. Na peronie czeka na pociąg 10 osób. Nadjeżdża skład złożony z 6 wagonów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że te osoby zajmą miejsca w dwóch wagonach, po 5 osób w każdym wagonie (zakładamy, że wszystkie rozmieszczenia pasażerów w wagonach pociągu są jednakowo prawdopodobne)?
3. Ania i Krzysiek wymyślili taką grę: Ania rzuci losowo dwiema symetrycznymi monetami i jedną sześcienną kostką do gry. Jeśli wypadnie co najmniej jeden orzeł i liczba oczek większa od 3, to wygrywa Ania. Jeśli wypadną dwie reszki lub 1 oczko na kostce, to wygrywa Krzysiek. Natomiast w pozostałych przypadkach będzie remis.
   a) Porównaj szanse wygrania Ani i Krzyśka.
   b) Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania remisu.
4. Wiadomo, że $P(A')=0,7$; $P(A\cup B)=0,6$; $P(A'\cup B')=0,9$. Oblicz $P(B\setminus A)$.
5. Ile rozwiązań złożonych z liczb całkowitych dodatnich ma równanie $a+b+c+d=20$?

Sprawdzian 2

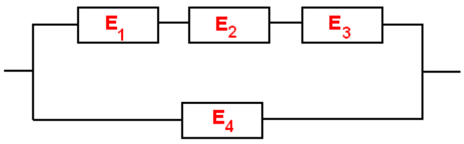
1. Niesforny Kubuś rozrzucił siedmiotomową encyklopedię na podłogę. Przestraszony, szybko ustawił ją na półce, zupełnie nie zwracając uwagi na kolejność tomów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że tomy 1 i 2 nie stoją obok siebie?
2. W klasie jest 15 chłopców. Ile jest co najwyżej dziewcząt, jeżeli prawdopodobieństwo wybrania dwuosobowej delegacji składającej się wyłącznie z dziewcząt jest mniejsze od $\frac{1}{3}$?
3. W przedziale jest 8 ponumerowanych miejsc po 4 w każdym rzędzie. Do tego przedziału wsiadło 6 pasażerów. Jakie jest prawdopodobieństwo, ze zajmując losowo

miejsca, usiądą w taki sposób, że będą tylko dwie pary osób siedzących naprzeciw siebie?

4. Ze zbioru liczb $\{3,4,5,6,7,8,9\}$ wylosowano kolejno, ze zwracaniem, dwie liczby i utworzono z nich liczbę dwucyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo, że utworzona liczba jest podzielna przez 3 lub przez 4.
5. Dany jest wielomian W(x) w postaci iloczynowej: $W(x)=(x-1)^{11}(x+1)^{11}$. Wielomian ten został wymnożony i uporządkowany. Jaki współczynnik jest przy jednomianie x^{20}? Odpowiedź uzasadnij.

<u>Sprawdzian 3</u>

1. Z talii 52 kart losujemy jednocześnie dwie karty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że co najmniej jedna karta jest damą, jeśli wiadomo, że żadna z nich nie jest waletem?
2. Rzucamy sześć razy dwiema kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymamy sumę oczek podzielną przez 4:
   a) tylko cztery razy,
   b) co najwyżej jeden raz.
3. Koparka pracuje w warunkach normalnych z prawdopodobieństwem 0,9, a w warunkach trudnych z prawdopodobieństwem 0,1. Prawdopodobieństwo awarii w trakcie pracy w warunkach normalnych wynosi 0,05, a w trakcie pracy w warunkach trudnych 0,2. Oblicz prawdopodobieństwo awarii koparki.
4. Wiadomo, że zdarzenia A i B są niezależne, oraz $P(A'\cap B')=\frac{3}{8}$, $P(A)=\frac{1}{3}$.
   a) Oblicz P(B).
   b) Czy zdarzenia A i B są rozłączne? Odpowiedź uzasadnij.
5. Urządzenie elektryczne U składa się z czterech jednakowych elementów E_1, E_2, E_3, E_4, połączonych jak na rysunku poniżej.



Prawdopodobieństwo, że każdy element będzie pracował bezawaryjnie wynosi $\frac{9}{10}$. Elementy ulegają uszkodzeniu niezależnie od siebie.
Oblicz prawdopodobieństwo bezawaryjnej pracy urządzenia U.

<u>Sprawdzian 4</u>

1. Dwóch strzelców oddało po jednym strzale do tego samego celu. Pierwszy z nich trafia średnio 9 razy na 12 strzałów, a drugi 8 razy na 10 strzałów. Oblicz prawdopodobieństwo, że:
   a) cel został trafiony dwa razy,
   b) cel został trafiony przynajmniej raz.
2. Oblicz $P(B/A)$, wiedząc, że $P(A'\cap B)=\frac{1}{5}$, $P(A'\cup B')=\frac{9}{10}$, $P(A\cup B)=\frac{3}{5}$.
3. Z talii 52 kart losujemy dwie karty. Oglądamy je i wkładamy z powrotem do talii. Tak postępujemy sześć razy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dwa razy otrzymamy jednego pika lub jednego kiera?
4. W sklepie znajdują się soki jabłkowe pewnej firmy z trzech zakładów Z_1, Z_2, Z_3. Stosunek ilości soku (w sklepie) wyprodukowanego przez te zakłady jest równy odpowiednio 1:1:3. Poza tym wiadomo, że pierwszego gatunku jest 80% soku z zakładu Z_1, 90% z zakładu Z_2 i 75% z zakładu Z_3. Ekspedientka sprzedała losowo

wzięty karton tego soku. Jakie jest prawdopodobieństwo, że był to sok w pierwszym gatunku?
5. Okazało się, że sprzedany sok (patrz zadanie 4) był pierwszego gatunku. Jakie jest prawdopodobieństwo, że został wyprodukowany przez zakład Z_3?

Stereometria

Sprawdzian 1

1. Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest dwa razy dłuższa od krawędzi jego podstawy. Przekrój ostrosłupa płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i wierzchołek ostrosłupa jest trójkątem o polu $16\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^2$. Oblicz cosinus kąta między ścianą boczną a płaszczyzną podstawy oraz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.
2. Najdłuższa przekątna graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość p i tworzy z krótszą przekątną podstawy wychodzącą z tego samego wierzchołka kąt o mierze α. Oblicz objętość graniastosłupa. Dla jakich α zadanie ma rozwiązanie?
3. Oblicz pole powierzchni kuli wpisanej w stożek o tworzącej długości l i kącie rozwarcia 2α
4. W trójkącie ABC bok AB ma długość a, natomiast kąty ostre do niego przyległe mają miary α i β. Trójkąt ten obracamy wokół osi równoległej do boku AB i przechodzącej przez wierzchołek C. Oblicz objętość otrzymanej bryły obrotowej.
5. W trójkącie ABC bok AB ma długość a, natomiast kąty ostre do niego przyległe mają miary α i β. Trójkąt ten obracamy wokół osi równoległej do boku AB i przechodzącej przez wierzchołek C. Oblicz objętość otrzymanej bryły obrotowej.

Sprawdzian 2

1. Krawędź boczna prawidłowego ostrosłupa trójkątnego jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz cosinus kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa.
2. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o boku a i kącie ostrym α. Dłuższa przekątna graniastosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt β. Oblicz objętość walca wpisanego w ten graniastosłup.
3. Wysokość trójkątnego ostrosłupa prawidłowego ma długość h, a krawędzie boczne są do siebie prostopadłe. Wyznacz długość promienia i pole powierzchni kuli opisanej na tym ostrosłupie.
4. Stożek o promieniu podstawy długości 6 cm i tworzącej długości 9 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez jego wierzchołek i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem o mierze $\frac{\pi}{3}$. Oblicz pole otrzymanego przekroju.
5. Siatkę ostrosłupa tworzą dwa przystające trójkąty prostokątne o przyprostokątnej długości 8 cm i dwa trójkąty równoboczne. Oblicz objętość ostrosłupa, przyjmując za podstawę trójkąt prostokątny.

Ciągłość i pochodna funkcji

Sprawdzian 1

1. Wyznacz równania wszystkich asymptot wykresu funkcji $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$, $x\in R\setminus\{1\}$.
2. Oblicz granicę (o ile istnieje). Jeśli nie istnieje granica, zbadaj, czy istnieją granice jednostronne w podanym punkcie.
   a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2+1}\right)$

b) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+2x^2-9x-18}{x^3+8}$

c) $\lim_{x\to 3} \frac{2x-6}{x^2-6x+9}$

3. Wyznacz te wartości parametru m, dla których funkcja f jest ciągła:
$$f(x)=\begin{cases} \frac{9-3x}{\sqrt{4-x}-1} & \text{dla } x<3 \\ m^2-m & \text{dla } x=3 \\ \frac{x^2-9}{x^2-5x+6} & \text{dla } x>3 \end{cases}$$
4. Na podstawie definicji (Heinego) granicy funkcji w punkcie, wykaż, że nie istnieje granica $\lim_{x\to 5} \frac{|x-5|}{x^2-6x+5}$.
5. W okrąg o danym promieniu R wpisujemy n-kąty foremne. Wyznacz pole S(n) takiego n-kąta. Oblicz $\lim_{n\to\infty} S(n)$. Wskazówka: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}=1$.

<u>Sprawdzian 2</u>

1. Oblicz granicę (o ile istnieje):

   a) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{-2x^2+x-2}$

   b) $\lim_{x\to -1^+} \frac{3x+2}{2+3x-x^3}$

   c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x\cos x}{x^2+1}$

   d) $\lim_{x\to\infty} \frac{4-8x^2}{(1-x)\sqrt{4x^2+x}}$

2. Zbadaj, czy wykres funkcji $f(x)=\frac{x^2+3x-10}{2x-x^2}$, $x\in R\setminus\{0,2\}$ posiada asymptoty. Jeśli tak, wyznacz ich równania.
3. Zbadaj, czy istnieje granica $\lim_{x\to -1} \frac{x-x^3}{|x+1|}$. Zilustruj zadanie rysunkiem.
4. Wyznacz największy podzbiór zbioru R, w którym ciągła jest funkcja:
$$f(x)=\begin{cases} \frac{2x^2+3x-2}{x+2} & \text{dla } x<-2 \\ x-3 & \text{dla } x\in\langle -2,0) \\ -3 & \text{dla } x=0 \\ \frac{x^2-3x}{x} & \text{dla } x>0 \end{cases}$$
5. Dla jakich wartości parametru a $(a\in R)$, granica $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+|a|x^2}-\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)$ jest równa 2?

Sprawdzian 3

1. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji: $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$, $x\in R\setminus\{-2,2\}$
2. Na podstawie definicji zbadaj różniczkowalność funkcji $f(x)=|x^2-9|$, $x\in R$ w punkcie:
   a) $x_0=-3$
   b) $x_0=1$
3. Naczynie w kształcie walca o promieniu podstawy 6 cm i wysokości 12 cm zawierające pewną substancję chemiczną wpisano w naczynie w kształcie stożka. Podstawa walca zawiera się w podstawie stożka, a okrąg górnej podstawy walca zawiera się w powierzchni bocznej stożka. Jaką długość powinien mieć promień podstawy stożka o najmniejszej objętości?
4. Punkt P(1,7) należy do wykresu funkcji $f(x)=\dfrac{x^2+ax+5}{x+b}$, gdzie $b\neq -1$. Styczna do wykresu funkcji f, poprowadzona w punkcie P jest prostopadła do prostej o równaniu $2x+3y=0$. Oblicz współczynniki a i b, oraz napisz równanie tej stycznej.
5. Wyznacz te wartości parametru m, dla których wielomian $W(x)=3x^4+16x^3+6m^2x^2$ ma tylko jedno ekstremum lokalne.

Sprawdzian 4

1. Dana jest funkcja $f(x)=\sqrt{3x-2}$, $x\in\left\langle\dfrac{2}{3},\infty\right)$.
   a) Korzystając z definicji, oblicz pochodną funkcji f w punkcie $x_0=1$.
   b) Napisz równanie prostej prostopadłej do stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $x_0=1$ i przechodzącej przez punkt o odciętej 1.
2. Dla jakich wartości a i b, $(a,b\in R)$, funkcja $f(x)=\begin{cases}\dfrac{5x+2a}{x-1} & \text{dla } x\le 0\\ x^2+2x+b & \text{dla } x>0\end{cases}$ jest ciągła i różniczkowalna w R?
3. Wyznacz najmniejszą i największa wartość funkcji $f(x)=\dfrac{x^2-3x+4}{x-3}$ w przedziale $\langle 0,2\rangle$
4. Objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 27 cm^3. Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jest funkcją długości jego krawędzi podstawy. Napisz wzór tej funkcji i wyznacz jej przedziały monotoniczności.
5. Zbadaj różniczkowalność funkcji $y=x[x]$, $x\in R$ w punkcie $x_0=0$.