Tematy zadań – sprawdziany klasa II poziom rozszerzony

Własności figur geometrycznych na płaszczyźnie

1. **Wyznacz kąty czworokąta wpisanego w okrąg, wiedząc, że przedłużenia przeciwległych boków przecinają się, tworząc kąty o miarach 45^0 i 65^0.**
2. **W dany okrąg wpisano trójkąt ABC, którego kąty mają miary 30^0, 40^0, 110^0. W punktach A,B,C poprowadzono styczne do okręgu. Oblicz miary kątów trójkąta KLM, utworzonego przez punkty przecięcia tych stycznych.**
3. **Wykaż, że dwusieczne kątów wewnętrznych równoległoboku przecinają się w punktach, które są wierzchołkami prostokąta.**
4. **Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC zbudowano kwadrat o boku AB, po przeciwnej stronie prostej AB, niż punkt C. Niech O oznacza środek kwadratu. Udowodnij, że półprosta $CO^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta prostego przy wierzchołku C.**

Funkcja kwadratowa

1. **Ułóż równanie kwadratowe takie, aby iloczyn pierwiastków równania był równy -2, a suma odwrotności pierwiastków wynosiła $\frac{1}{5}$.**
2. **Fabryka produkowała 300 telewizorów miesięcznie. Na skutek nierytmicznych dostaw podzespołów, w marcu i kwietniu produkcja spadła o ten sam procent w stosunku do poprzedniego miesiąca. Wiedząc, że w kwietniu wyprodukowano 243 telewizory, oblicz o ile procent spadła produkcja w marcu. Jak duży spadek procentowy produkcji nastąpił w ciągu tych dwóch miesięcy?**
3. **Rozwiąż nierówność $x-1<\sqrt{6+x-x^2}$**
4. **Dla jakich wartości parametru $m\in R$, równanie $-x^2+2|x|-m^2+8=0$ ma dwa różne rozwiązania?**
5. **Na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych zilustruj zbiór wszystkich punktów o współrzędnych (p,q) takich, że funkcja $f(x)=x^2+px+q$ ma dwa różne miejsca zerowe ujemne.**

Okrąg i koło w układzie współrzędnych

1. **Napisz równanie okręgu, którego środek znajduje się na prostej $k: y=-\frac{1}{2}x+1$, przechodzącego przez punkty A=(5,1), B=(6,-2).**
2. **W prostokątnym układzie współrzędnych zilustruj zbiory:**
   $A=\{(x,y): x^2+y^2+8x+7<0\}$, $B=\{(x,y): x^2+y^2+2x-10y+10\le 0\}$.
   Następnie wyznacz zbiory $A\cap B$, $A'-B$, $A\cup B$.
3. **Dany jest okrąg o równaniu $x^2+2x+y^2-4y-5=0$.**
   a) **Sprawdź, czy punkt P=(2,3) należy do tego okręgu. Znajdź równanie stycznej do okręgu, przechodzącej przez punkt P.**
   b) **Napisz równanie stycznych do danego okręgu, równoległych do prostej $k: 3x-y=0$.**
4. **Dla jakich wartości parametru m okręgi: $o_1: (x-m)^2+(y+4)^2=8$ oraz $o_2: (x-2)^2+(y+m)^2=2$ są wewnętrznie styczne? Oblicz współrzędne punktu styczności.**

5. Znajdź zbiór środków wszystkich okręgów stycznych zewnętrznie do okręgu o równaniu $x^2+(y-2)^2=1$ i stycznych do prostej $y=-2$.

Wielomiany

Sprawdzian 1

1. Dla jakich wartości a i b wielomian $W(x)=x^4-4x^3+ax+b$ jest podzielny przez trójmian kwadratowy $P(x)=x^2-x-2$?
2. Reszta z dzielenia wielomianu W(x) przez wielomian $P(x)=x^3+5x^2-x-5$ jest równa $R(x)=x^2+2x-4$. Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez wielomian $F(x)=x^2-1$.
3. Dany jest wielomian $W(x)=x^3-6x^2+mx+q$. Wyznacz m i q oraz znajdź jego pierwiastki, wiedząc, że ich stosunek wynosi 1:2:3.
4. Rozłóż na czynniki wielomiany, wyznacz ich pierwiastki i ustal ich krotności:
   a) $W(x)=x^5+6x^4+4x^3+24x^2$
   b) $V(x)=x^4-x^3-5x^2+3x+6$
5. Wielomian $W(x)=2x^4+4x^3+ax^2+bx+2$ ma cztery różne pierwiastki. Oblicz ich sumę.

Sprawdzian 2

1. Rozwiąż równanie i określ krotności pierwiastków: $x^4-6x^3+13x^2-12x+4=0$
2. Wyznacz $A\setminus B$, jeśli:
   $A=\{x: x\in R \wedge x^3+2x^2<16x+32\}$,
   $B=\{x: x\in R \wedge (x^4+27x)(1-x^4)(x^2-8x+7)\le 0\}$
3. Wyznacz dziedzinę funkcji określonej wzorem: $f(x)=\dfrac{7x}{\sqrt{|x^3+2x|-3x}}$.
4. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^5+(m+1)x^3+(m^2-1)x=0$ ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty?
5. Znajdź wszystkie wielomiany W(x) spełniające warunki:
   $W(0)=2,\ W(x_1+x_2)=W(x_1)+W(x_2)+2x_1x_2-2$

Funkcje wymierne

1. Dane są funkcje: $f(x)=\dfrac{Ax+B}{x+1}+\dfrac{C}{x-5}$ i $g(x)=\dfrac{x-13}{x^2-4x-5}$.
   a) Dla A=1, B=3, C=8 rozwiąż nierówność $f(x)\ge g(x)$.
   b) Dla jakich wartości parametrów A,B,C funkcje f i g są równe?
2. Rozwiąż równanie: $\dfrac{1}{x^2+x+1}=\dfrac{5}{2-2x^3}-\dfrac{x}{2x-2}$
3. Z równania $xy-2x+y+2=0$ wyznacz y jako funkcję zmiennej x.
   a) Naszkicuj wykres tej funkcji.
   b) Wyznacz dziedzinę, zbiór wartości tej funkcji oraz punkty przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych.
   c) Narysuj w nowym układzie współrzędnych wykres funkcji $y=-|f(x)|$.
4. Dla jakich wartości parametru m istnieją dwa różne pierwiastki równania
   $\dfrac{mx}{m-1}+\dfrac{m+1}{x}=x+1$ spełniające warunek $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}<2m+1$?

5. **Wyznacz te wartości parametru k, dla których równanie $\frac{2x-1}{x-k}=\frac{kx-2}{k^2-kx}-\frac{2x}{k}$ ma dwa różne rozwiązania.**

Indukcja matematyczna i dwumian Newtona

1. **Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenia:**

   a) $\frac{(10!)^2}{9!\cdot 11!}$

   b) $\frac{\binom{n+3}{n+1}}{\binom{n+1}{n-1}+\binom{n+1}{n}}$

2. **Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona, zapisz w postaci sumy wyrażenie $(2x-1)^5$.**

3. **W rozwinięciu $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^7$, gdzie $x\in R^+$, wyznacz współczynnik przy x^5.**

4. **Metodą indukcji matematycznej wykaż, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej n prawdziwa jest równość: $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+...+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$**

5. **Dla jakich naturalnych n prawdziwa jest nierówność $5^{n-1}\geq 2n^2+1$? Sformułuj hipotezę i udowodnij ją metodą indukcji matematycznej.**

Ciągi

Sprawdzian 1

1. **Wykaż na podstawie definicji, że granicą ciągu o wyrazie ogólnym $a_n=\frac{2n+1}{3+8n}$ jest liczba $\frac{1}{4}$. Które wyrazy ciągu są oddalone od granicy o mniej, niż $\varepsilon=0{,}001$?**

2. **Oblicz, korzystając z odpowiednich twierdzeń o granicach:**

   a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{(2n+1)(3n-2)(n+1)}{(n+4)(n+5)}}$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n\sin 5n^2}{n^2-n}$

3. **Dany jest ciąg określony wzorem rekurencyjnym: $\begin{cases} b_1=2 \\ b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}\end{cases}$. Wyznacz trzy początkowe wyrazy tego ciągu, a następnie udowodnij, że $b_n=1+\frac{1}{2^{n-1}}$. Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.**

4. **Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n=2n^2-5n-7$, oraz ciąg $b_n=|a_n|$. Zbadaj monotoniczność każdego z tych ciągów.**

5. **Dla jakich wartości parametru p ciąg o wyrazie ogólnym $a_n=\sqrt{9n^2+3n+1}-(pn-2)$**

a) jest zbieżny (oblicz jego granicę),
b) jest rozbieżny do $+\infty$,
c) jest rozbieżny do $-\infty$.

Sprawdzian 2

1. Trzy liczby dodatnie a,b,c tworzą ciąg geometryczny. Suma tych liczb jest równa 21, a suma ich odwrotności wynosi 0,58(3). Znajdź te liczby.
2. Rozwiąż nierówność: $\frac{2x}{x^2-3}+\left(\frac{2x}{x^2-3}\right)^2+\left(\frac{2x}{x^2-3}\right)^3+\ldots\le 0$
3. Liczby $x+y,\ 3x+2y+1,\ x^2+5x+4y$ tworzą ciąg arytmetyczny. Wyznacz te wartości x, dla których ciąg ten jest rosnący.
4. W dniu 18 urodzin syna ojciec założył mu w prezencie lokatę półroczną odnawialną, oprocentowaną na 10% w skali roku, wpłacając na nią pewną kwotę pieniędzy.
   a) Przyjmując, że wpłacona kwota wynosiła 2000 zł, oblicz, po jakim czasie syn wypłaci sumę 3202,06 zł.
   b) Jaką kwotę musiałby wpłacić ojciec, aby po czterech latach syn otrzymał sumę 4789,99 zł?

   W obu przypadkach uwzględnij 20% podatek od odsetek.
5. Wykaż, że jeżeli wszystkie wyrazy ciągu arytmetycznego (a_n) są różne od zera, to prawdziwa jest równość: $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}$

Pola figur płaskich, twierdzenie Talesa, sinusów, cosinusów

1. Dany jest równoległobok o kącie ostrym $\alpha=\frac{\pi}{4}$ i bokach długości $a=2\sqrt{3}$ i $b=3\sqrt{2}$. Oblicz długości przekątnych tego równoległoboku, jego pole i długości obu wysokości.
2. Przekrój poprzeczny tortu jest trójkątem równoramiennym. Uzasadnij, że jeżeli pokroimy tort wzdłuż środkowych boków trójkąta, to każdy z gości otrzyma jedną z sześciu równych części.
3. W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną na odcinki długości 2 i 8. Oblicz:
   a) pole tego trójkąta,
   b) długości odcinków, na jakie dwusieczna kąta prostego podzieliła przeciwległy bok,
   c) stosunek pola koła wpisanego w ten trójkąt do pola koła opisanego na trójkącie.
4. Dane są punkty A=(0,5), B=(1,0). Na prostej będącej wykresem funkcji liniowej $f(x)=3x-6$ znajdź taki punkt C, by $|\angle ACB|=90^0$.
5. W trapez równoramienny o obwodzie 52 i przekątnej długości $\sqrt{313}$ można wpisać okrąg. Oblicz odległości punktu przecięcia przekątnych tego trapezu od podstaw.