Tematy zadań – sprawdziany klasa II poziom podstawowy

Własności figur geometrycznych na płaszczyźnie

1. **Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC, $|\angle AOB| = 162^0$, a promień OA okręgu tworzy z bokiem AC kąt miary 28^0. Oblicz miary kątów trójkąta ABC.**
2. **Dwa boki czworokąta ABCD opisanego ona okręgu mają długości $|AB| = 8\,cm$, $|BC| = 7\,cm$, natomiast $3|CD| = 2|AD|$. Oblicz długości pozostałych boków i obwód czworokąta.**
3. **Ramiona trapezu mają długości 5cm i 7 cm, a jedna z podstaw jest trzy razy dłuższa od drugiej. Obwód trapezu wynosi 24 cm.**
   a) **Oblicz długość odcinka łączącego środki ramion.**
   b) **Czy na tym trapezie można opisać okrąg? Czy można w ten trapez wpisać okrąg? Odpowiedź uzasadnij.**
4. **Punkty A i B należą do okręgu o środku O. Z punktu P leżącego na zewnątrz okręgu poprowadzono styczne do okręgu odpowiednio w punktach A i B. Wiedząc, że $|\angle OAB| = 40^0$, oblicz miary kątów czworokąta AOBP, oraz trójkąta OPA.**
5. **Dany jest okrąg o środku w punkcie A i promieniu 6 cm. Jaki warunek spełnia promień okręgu o środku w punkcie B, gdzie $|AB| = 8\ cm$, jeżeli dane okręgi:**
   a) **są styczne wewnętrznie,**
   b) **są rozłączne zewnętrznie?**

Funkcja kwadratowa

1. **Funkcja kwadratowa $f(x) = -2x^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = -1$ oraz $x_2 = 3$.**
   a) **Wyznacz b oraz c.**
   b) **Podaj postać kanoniczną tej funkcji.**
   c) **Narysuj wykres funkcji.**
2. **Rozwiąż:**
   a) **algebraicznie nierówność: $9 - (2 - 3x)^2 \le 0$,**
   b) **graficznie nierówność: $x > x^2 - 6$.**
3. **Liczbę osób, które odwiedziły wystawę n-tego dnia od momentu jej otworzenia w przybliżeniu opisuje wzór $W(n) = -6n^2 + 60n - 50$, gdzie $n \in N$ i $1 \le n \le 9$.**
   a) **W którym dniu wystawę odwiedziło najwięcej osób, i ile ich było?**
   b) **Ile osób odwiedziło wystawę podczas jej trwania?**
4. **W roku 1845 na uroczystości urodzin spytał ktoś jubilata, ile on ma lat, na co jubilat odpowiedział: „Gdy swój wiek sprzed 15 lat pomnożę przez swój wiek za 15 lat, to otrzymam rok swego urodzenia”. Ile lat miał wówczas jubilat?**
5. **Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$. Wyznacz a i b wiedząc, że $\bigwedge_{x \in R} f(x-1) - f(x) = 4 - 6x$.**

Wielomiany

1. **Rozwiąż równanie i ustal krotność każdego z pierwiastków: $(x^2 - 4)(x^2 - 3x - 4) + 3x(4 + 3x - x^2) = 0$**

2. Wyznacz $A \cap B$, jeśli: $A=\{x : x \in R \wedge x^5-4x^3+x^2-4>0\}$
$B=\{x : x \in R \wedge -2x(x-1)^2(5-x) \geq 0\}$
3. Dane są wielomiany $G(x)=(ax^2+x+3)(x+b)$, $H(x)=3x^3+7x^2+5x+6$.
   a) Wyznacz wartości a i b, dla których wielomiany G(x) i H(x) są równe.
   b) Nie wykonując dzielenia, wyznacz resztę z dzielenia wielomianu H(x) przez każdy z dwumianów x+1, x-2.
4. Znajdź wielomian W(x) trzeciego stopnia, który ma pierwiastek dwukrotny -3, oraz pierwiastek pojedynczy $\frac{1}{2}$, przy czym $W(0)=-9$. Rozwiąż nierówność $W(x) \geq 0$.
5. Wyznacz dziedzinę funkcji $y=\sqrt{x^3-x\cdot|x+12|}$

Funkcje wymierne

1. Rozwiąż równanie $\frac{x-1}{x-5}-\frac{2x}{x+1}=\frac{-12}{x^2-4x-5}$
2. Rozwiąż układ nierówności: $\begin{cases} 2>\frac{3}{x} \\ \frac{1+x}{1+2x}+1 \leq \frac{1-2x}{x+1} \end{cases}$
3. Dana jest funkcja $f(x)=\frac{3x+1}{x+1}$.
   a) Wyznacz dziedzinę, zbiór wartości, oraz miejsca zerowe funkcji f.
   b) Narysuj wykres funkcji f i odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości nie mniejsze, niż 2.
4. Zbadaj, czy funkcje określone następującymi wzorami:
   $f(x)=\frac{x}{x^3-9x}$ oraz $g(x)=\frac{x^2-3x}{x^4-3x^3-9x^2+27x}$ są równe.
5. Dla jakich wartości parametru m równanie $\frac{2mx}{2x-1}=\frac{mx+1}{x+2}$ ma tylko jedno rozwiązanie? Wyznacz to rozwiązanie.

Ciągi

Sprawdzian 1

1. Dany jest ciąg $a_n=\frac{9n^2-6n+1}{3n-1}$. Na podstawie odpowiednich definicji:
   a) Zbadaj, czy jest to ciąg arytmetyczny.
   b) Zbadaj, czy jest to ciąg geometryczny.
   c) Zbadaj monotoniczność ciągu.
   d) Narysuj wykres ciągu (zaznacz 4 początkowe wyrazy).
2. Rozwiąż równanie: $3+7+11+...+x=210$.
3. Pan Kowalski wpłaca do banku sumę 1000 zł na rachunek oprocentowany w stosunku rocznym 12%. Oblicz stan jego konta po roku (z uwzględnieniem 20 procentowego podatku od odsetek), w następujących sytuacjach:
   a) Jeżeli kapitalizacja jest miesięczna i pan Kowalski nie dokonuje wpłat ani wypłat.
   b) Jeżeli kapitalizacja jest miesięczna i pan Kowalski wpłaca na początku każdego miesiąca 1000 zł i nie dokonuje wypłat.

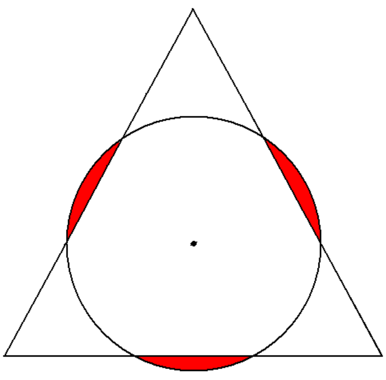
4. Trzy liczby są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o ilorazie większym od 1. Jeżeli do drugiej liczby dodamy 4, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego. Gdy teraz do ostatniego wyrazu nowego ciągu dodamy 32, to otrzymamy znowu trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Znajdź te liczby.
5. Oblicz: $1+11+111+...+\underbrace{111...1}_{\text{n cyfr}}$ (wskazówka: $11=\frac{99}{9}=\frac{10^2-1}{9}$)

Sprawdzian 2

1. Dla jakich wartości x, liczby $x^3, x^2-x, x-6$ są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n)? Dla znalezionej wartości napisz wzór ogólny ciągu (a_n) i zbadaj na podstawie definicji jego monotoniczność.
2. Pan X umówił się z panem Y, że będzie mu wypłacał codziennie przez dwa tygodnie pieniądze, przy czym pierwszego dnia 10 zł, drugiego 30 zł, trzeciego 50 zł, czwartego 70 zł itd. W zamian pan Y wypłaci panu X pierwszego dnia 1 grosz, drugiego 3 grosze, trzeciego 9 groszy, czwartego 27 groszy itd. Który z panów zyska na tej umowie i ile?
3. Między liczby 16 i 81 wstaw trzy liczby tak, by wraz z podanymi liczbami tworzyły ciąg geometryczny.
4. Między liczby 16 i 81 wstaw trzy liczby tak, by wraz z podanymi liczbami tworzyły ciąg geometryczny.
5. Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) wyraża się wzorem $S_n=5n^2-3n+3$. Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Pola figur i twierdzenie Talesa

1. Pole trapezu opisanego na okręgu wynosi P. Ramiona trapezu tworzą z dłuższą jego podstawą kąty o miarach α i 3α. Oblicz długość promienia okręgu.
2. Rysunek przedstawia logo pewnej firmy. Można je narysować w następujący sposób: ze środka ciężkości trójkąta równobocznego o boku a kreślimy okrąg o promieniu $\frac{1}{3}a$. Część koła znajdująca się poza trójkątem jest zamalowana. Oblicz pole zamalowanej części figury.



3. Dane są odcinki długości a, b, c. Skonstruuj odcinek o długości $x=\frac{a\cdot c}{\sqrt{5}\cdot b}$.
4. W trójkącie prostokątnym ABC $\left(|\angle ABC|=90^0\right)$ mamy dane: |AC|=17 cm, |AB|<|BC|. W trójkącie tym poprowadzono prostą równoległą do boku AB. Odległość tej prostej od boku AB jest równa |AB|. Odcinek leżący na tej prostej, zawarty w trójkącie, ma długość $\frac{3}{4}|AB|$. Oblicz pole trójkąta.

5. **Przekątne AC i BD podzieliły trapez ABCD na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z nich, jeżeli pole trapezu wynosi P, a stosunek długości podstaw trapezu jest równy stosunek.**