Tematy zadań – sprawdziany klasa I poziom rozszerzony

Elementy logiki

1. Oceń wartość logiczną zdań i podaj ich negacje:
   a) Stefan Żeromski był polskim pisarzem i nieprawda, że napisał „Trylogię”.
   b) $\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^2=3\right] \vee \left[4|5782 \Rightarrow \bigvee_{x\in N} \frac{1}{2}x+5<0\right]$
2. Sformułuj prawo logiczne dotyczące zaprzeczenia implikacji o poprzedniku p i następniku q, a następnie udowodnij je.
3. Wśród podanych wyrażeń wskaż formy zdaniowe, a następnie wyznacz dziedzinę i zbiór elementów spełniających każdą z form zdaniowych:
   a) $x^2=1 \wedge \sqrt{x+3}=2$
   b) $\frac{1}{3}b+1\geq 0 \vee b\in N$
   c) $\bigvee_{a\in R} 2a^2+3=0$
4. Równoważność zdań r i p jest fałszywa oraz implikacja $p\Rightarrow(\sim q)$ jest fałszywa. Oceń wartość logiczną zdania: $[\sim(p\wedge q)\vee r]\Leftrightarrow[(\sim q)\Rightarrow r]$.
5. Zaznacz na płaszczyźnie zbiór punktów, których współrzędne spełniają formę zdaniową $a(x,y)$: $x>2\Rightarrow y-2x>0$

Zbiór liczb rzeczywistych

1. Oblicz: $\dfrac{7{,}68:0{,}256}{9\frac{3}{5}\cdot\left(1\frac{1}{12}+2\frac{5}{32}+\frac{1}{24}\right)-\frac{3}{7}\cdot 3{,}5}$. Czy otrzymana liczba jest:
   a) wymierna,
   b) całkowita,
   c) pierwsza?

   Odpowiedź uzasadnij.
2. Udowodnij, że różnica kwadratów dwóch liczb całkowitych niepodzielnych przez 3, jest podzielna przez 3.
3. Oblicz: $\dfrac{\left(343^{\frac{1}{3}}-7\sqrt{7}\right)\left(\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}+7^{1{,}5}\right)}{\left(6\sqrt{6}\right)^{\frac{4}{3}}}$
4. Wyznacz resztę z dzielenia przez 8 różnicy sześcianów dwóch kolejnych liczb naturalnych nieparzystych.
5. Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych (x,y) spełniające równanie: $2x^3+3xy-7=0$.

Wektory

1. Dane są punkty A=(1,-2), B=(3,4), C=(3,0), D=(-4,7).
   a) Wyznacz współrzędne i długość wektora $\vec{u}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC}+3\cdot\overrightarrow{BD}$.
   b) Dla jakich wartości k wektor $\vec{u}$ jest równoległy do wektora $\vec{v}=[k-3,4-k]$?

2. Punkty A=(-1,-3) i B=(5,2) są wierzchołkami trójkąta ABC. Punkt P=(3,4) dzieli bok BC w stosunku 2:3 licząc od punktu B. Wyznacz współrzędne wierzchołka C oraz obwód trójkąta ABC.
3. W trójkącie ABC dane są: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, oraz takie punkty P,Q, że $P\in AC, Q\in BC$ i $\frac{|CP|}{|PA|}=\frac{|CQ|}{|QB|}=\frac{1}{3}$. Wykaż, że $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{4}\vec{a}$.

Własności figur geometrycznych na płaszczyźnie

1. W trójkątach ostrokątnych ABC i $A_1B_1C_1$ poprowadzono wysokości AD i A_1D_1. Wykaż, że jeżeli $|AD|=|A_1D_1|$, $|BC|=|B_1C_1|$, $|\angle B|=|\angle B_1|$, to $\Delta ABC\equiv\Delta A_1B_1C_1$
2. Miary kolejnych kątów czworokąta są w stosunku 2:3:1:3, przy czym boki zawarte w ramionach najmniejszego kąta mają tę samą długość. Oblicz miary kątów czworokąta i miarę kąta między jego przekątnymi.
3. W trójkącie równoramiennym wysokość opuszczona na podstawę jest równa odcinkowi, który łączy środek podstawy ze środkiem ramienia. Podstawa trójkąta ma długość a. Jaką długość ma wysokość opuszczona na podstawę?
4. Wykaż, że suma długości środkowych trójkąta jest mniejsza od obwodu tego trójkąta.
5. Czy istnieje jedenastokąt wypukły, który ma cztery kąty proste? Odpowiedź uzasadnij.

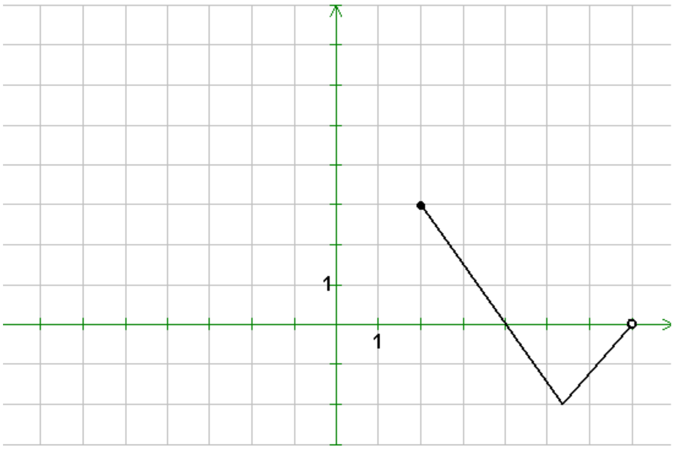
Przekształcenia płaszczyzny

1. W układzie współrzędnych dany jest trójkąt o wierzchołkach A=(2,-1), B=(-1,3), C=(-4,-2). Znajdź obraz trójkąta ABC:
   a) w symetrii względem osi OX,
   b) w translacji o wektor $\vec{u}=[2,3]$

   Wskaż punkty stałe każdego z tych przekształceń.
2. Obrazem prostej k w przesunięciu równoległym o wektor $[6,-4]$ jest prosta l o równaniu $y=\frac{1}{2}x-4$. Znajdź równanie prostej k.
3. Wykaż, że w symetrii środkowej obrazem prostej jest prosta do niej równoległa.

Funkcja i jej własności

1. Narysuj wykres funkcji $y=x^2-9$, $x\in(-4,-1\rangle\cup\{0,1\}$ i wyznacz jej zbiór wartości.
2. Wykaż, że funkcja $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty,-1)$.
3. Rysunek przedstawia fragment wykresu pewnej funkcji y=f(x), o której wiadomo, że jest parzysta i jej dziedziną jest zbiór $(-7,2)\cup\langle 2,7)$. Dorysuj brakujący fragment wykresu funkcji f, a następnie odczytaj z rysunku:
   a) miejsca zerowe funkcji,
   b) przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości nieujemne.



4. Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji $f(x)=\dfrac{|x-3|-2}{\sqrt{1-\frac{1}{2}x}}$.

5. Narysuj wykres i wyznacz zbiór wartości funkcji: $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{4-2x}$.

Przekształcenia wykresów funkcji

1. Wykres funkcji $y=\sqrt{x}$ przesunięto równolegle o wektor $\vec{u}=[2,-1]$, a następnie otrzymany wykres przekształcono w symetrii względem osi OX i otrzymano wykres funkcji f. Napisz wzór funkcji f i narysuj jej wykres. Czy otrzymamy wykres tej samej funkcji f, jeżeli zmienimy kolejność przekształceń?
2. Narysuj wykres funkcji $y=\big|2-|x-1|\big|$ i wyznacz jej zbiór wartości.
3. Dana jest funkcja $f(x)=x^2-3$, $x\in\langle-2,3\rangle$. Napisz wzory i narysuj wykresy funkcji $g(x)=2f(x)$ oraz $h(x)=f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

Trygonometria

1. W trójkącie ABC wysokość CD ma długość 15 cm, $|\angle CAB|=30^0$ i $|\angle ABC|=45^0$. Oblicz obwód trójkąta ABC.
2. Oblicz $tg\alpha\cdot tg\beta$, jeżeli $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$, $\cos\beta=\frac{5}{13}$, $\alpha,\beta\in\left(\frac{3}{2}\pi,2\pi\right)$.
3. Rozwiąż równanie: $2\cos^2 2x=1$.
4. Oblicz wartość wyrażenia $tg\frac{7}{4}\pi\cdot\cos\left(-\frac{17}{6}\pi\right)+ctg\frac{5}{2}\pi+\sin^2\frac{\pi}{9}+\sin^2\frac{7}{18}\pi$
5. Sprawdź, czy równość $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-tg\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}$ jest tożsamością trygonometryczną. Podaj założenia.
6. Dla jakich wartości m równanie $3\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=|m-1|-5$ ma rozwiązanie?

Funkcja liniowa

Sprawdzian 1

1. a) Napisz wzór nieparzystej funkcji liniowej, której wykres jest nachylony do dodatniej półosi OX pod kątem $\alpha = \frac{2}{3}\pi$.

b) Jaką wartość musi mieć parametr k, aby prosta o równaniu $y = \sqrt{k} \cdot x + 2$ przecinała wykres funkcji z punktu a) pod kątem prostym?

2. Średnie zużycie paliwa dla samochodu VW Passat wynosi 8,5 l na 100 km. Przyjmując, że samochód początkowo miał w baku 50 l paliwa, opisz dla niego zależność między ilością paliwa, które pozostanie w baku (p), a przebytą drogą (s). Narysuj wykres tej funkcji. Po ilu kilometrach paliwo zostanie zużyte? Wynik podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.
3. Narysuj wykres funkcji $f(x) = |x+1| - 2\sqrt{x^2 - 2x + 1}$. Zapisz wzór funkcji nie używając symbolu wartości bezwzględnej i określ jej zbiór wartości.
4. Gęstości bezwzględne wody w temperaturze 15^0C i 20^0C wynoszą odpowiednio $0{,}9991 \frac{g}{cm^3}$ i $0{,}9982 \frac{g}{cm^3}$. Oblicz gęstość bezwzględną wody w temperaturze 18^0C, przyjmując, że gęstość bezwzględna (ρ) zależy liniowo od temperatury (T). Wyraź tę zależność wzorem.
5. Wyznacz wzór funkcji liniowej f spełniającej dla każdego $x \in R$ warunek $f(2x+3) + 5x = g(x)$, gdzie g jest okresową funkcją liniową, do której wykresu należy punkt $B = (1,-2)$.

<u>Sprawdzian 2</u>

1. Rozwiąż równanie $(x+2)^3 - 12\sqrt{2}\,x = x^2(x+6) + 20$ i sprawdź, czy rozwiązanie tego równania jest miejscem zerowym funkcji $y = \left(\sqrt{2} - 1\right)x + 1$.
2. Rozwiąż algebraicznie nierówność: $|x-3| - \sqrt{4x^2 - 4x + 1} > 1$.
3. Przedyskutuj liczbę rozwiązań równania w zależności od wartości parametru p: $p^2x - 4px = p^2 - 4(1+x)$.
4. Sekretarka prezesa pewnej firmy otrzymuje stałą pensję miesięczną w wysokości 1800 zł, 10% premię uznaniową oraz dodatkowe wynagrodzenie za nadgodziny. W styczniu miała 20 nadgodzin, i otrzymała, wraz z premią, 2220 zł.
   a) Oblicz stawkę za godzinę nadliczbową.
   b) Napisz wzór funkcji wyrażającej wynagrodzenie sekretarki (z premią) w zależności od liczby przepracowanych godzin nadliczbowych.
5. Zaznacz na płaszczyźnie zbiór $Z = \{(x,y) : x \in R \wedge y \in R \wedge [x] = 2 \wedge y^2 \geq 3\}$, gdzie [x] oznacza największą liczbę całkowitą nie większa niż x.