Siedem zadań internautów

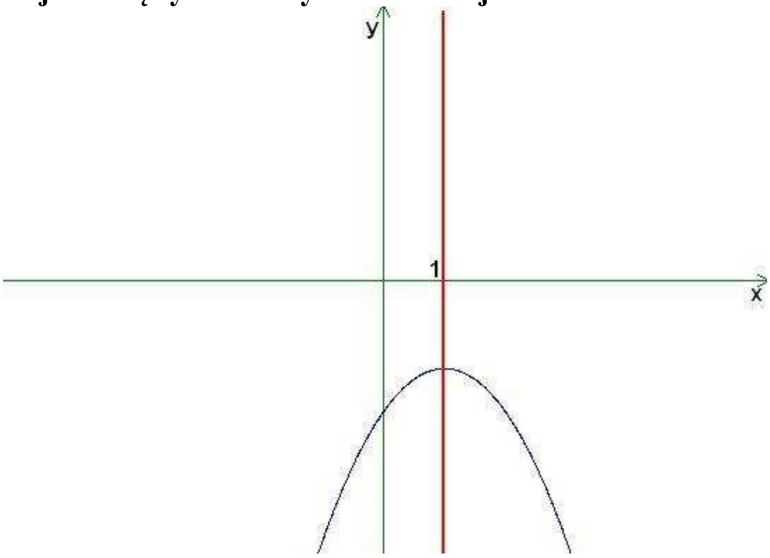
Zadanie 1- poziom wymagań: podstawowy

Współczynniki funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + bx + c$ tworzą w kolejności $-1, b, c$ ciąg geometryczny. Wyznacz wartość współczynników b i c, jeżeli wiadomo, że osią symetrii wykresu funkcji f jest prosta $x = 1$. Zapisz funkcję w postaci kanonicznej.

Rozwiązanie

$f(x) = -x^2 + bx + c$

Jeżeli prosta $x = 1$ jest osią symetrii wykresu funkcji:



to pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli wynosi 1, czyli:

$$\frac{-b}{2\cdot(-1)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad b = 2$$

Mamy: $f(x) = -x^2 + 2x + c$.

Ciąg geometryczny: $(-1, b, c) = (-1, 2, c)$.

Iloraz tego ciągu wynosi -2, czyli $c = 2\cdot(-2) = -4$.

Szukane współczynniki wynoszą: $b = 2$, $c = -4$, a równanie funkcji: $f(x) = -x^2 + 2x - 4$.

Druga współrzędna wierzchołka paraboli wynosi $f(1) = -1^2 + 2\cdot 1 - 4 = -3$, czyli wierzchołek ma współrzędne $W = (1, -3)$.

Postać kanoniczna funkcji: $f(x) = -(x-1)^2 - 3$.

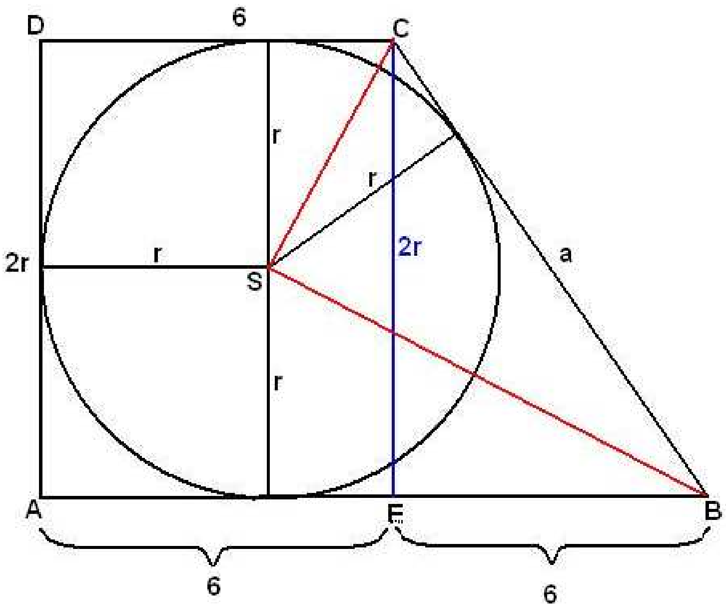
****
****

Zadanie 2 - poziom wymagań: rozszerzony

W trapez prostokątny ABCD (odcinek AD jest prostopadły do odcinka AB), którego podstawy mają długości $|AB| = 12$ i $|CD| = 6$, wpisano koło o środku S.

a) **Oblicz długość ramion trapezu ABCD.**
b) **Uzasadnij, że trójkąt BSC jest prostokątny.**

Rozwiązanie



a) Trapez jest opisany na kole. Z własności czworokąta opisanego na kole mamy:

$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$

$12 + 6 = 2r + a$

$2r + a = 18$

Ponadto w trójkącie EBC: $(2r)^2 + 6^2 = a^2$.

Otrzymaliśmy układ równań:

$$\begin{cases} 2r + a = 18 \\ (2r)^2 + 6^2 = a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2r + a = 18 \\ 4r^2 + 36 = a^2 \end{cases}$$

$a = 18 - 2r$

$4r^2 + 36 = (18 - 2r)^2$

$4r^2 + 36 = 324 - 72r + 4r^2$

$72r = 288$

$r = 4$

$a = 18 - 2r = 18 - 2 \cdot 4 = 10$

Ramiona trapezu mają długości: $|AD| = 2r = 8$ i $|BC| = a = 10$.

b) $|\angle ABC| + |\angle BCD| = 180^\circ$.

Środek koła wpisanego w trapez jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów trapezu, dlatego: $|\angle SCB| = \frac{1}{2} \cdot |\angle BCD|$ i $|\angle SBC| = \frac{1}{2} \cdot |\angle ABC|$.

Dlatego $|\angle SCB| + |\angle SBC| = 90^\circ$.

$|\angle BSC| = 180^\circ - \left(|\angle SCB| + |\angle SBC|\right) = 90^\circ$, co dowodzi, że trójkąt BSC jest prostokątny.

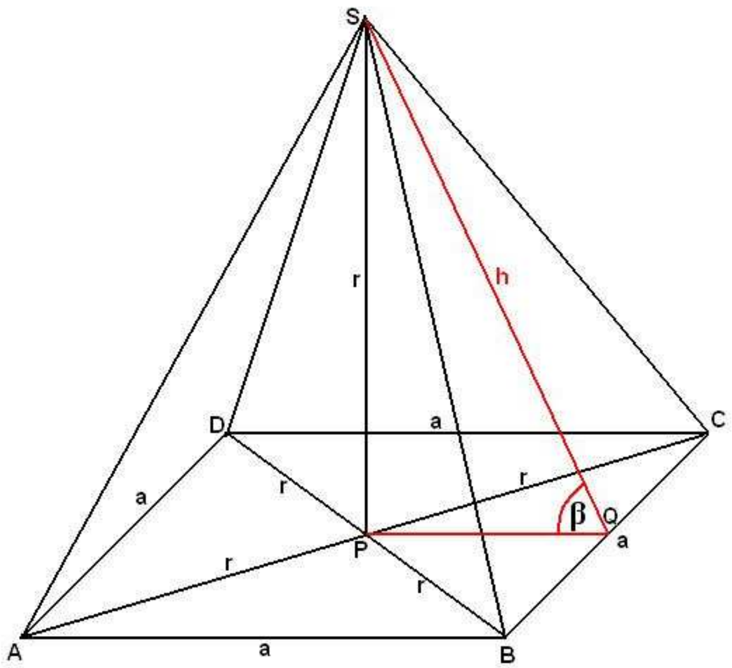
****
****

Zadanie 3 - poziom wymagań: rozszerzony

Długość wysokości ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa długości promienia okręgu opisanego na podstawie. Pole ściany bocznej ostrosłupa jest równe $18\sqrt{3}$.

a) **Oblicz objętość tego ostrosłupa.**
b) **Zaznacz na rysunku kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy danego ostrosłupa i oblicz cosinus tego kąta.**

Rozwiązanie



r – długość promienia okręgu opisanego na podstawie

$$\frac{1}{2}ah = 18\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad ah = 36\sqrt{3}$$

W trójkącie PQS: $r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4r^2 + a^2 = 4h^2$.

Ponadto $2r = a\sqrt{2}$ **- długość przekątnej kwadratu o boku a.**

Otrzymaliśmy układ równań:

$$\begin{cases} ah = 36\sqrt{3} \\ 2r = a\sqrt{2} \\ 4r^2 + a^2 = 4h^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ah = 36\sqrt{3} \\ 2r = a\sqrt{2} \\ (2r)^2 + a^2 = 4h^2 \end{cases}$$

$2r = a\sqrt{2}$ **, stąd mamy:**

$$\begin{cases} ah = 36\sqrt{3} \\ \left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2 = 4h^2 \end{cases}$$

$$2a^2 + a^2 = 4h^2$$

$$3a^2 = 4h^2$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$ah = 36\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 36 \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad a = 6\sqrt{2}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{6}$$

$$r = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 6$$

Objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot r = \frac{1}{3} \cdot 72 \cdot 6 = 144$$

Kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy oznaczono na rysunku β:

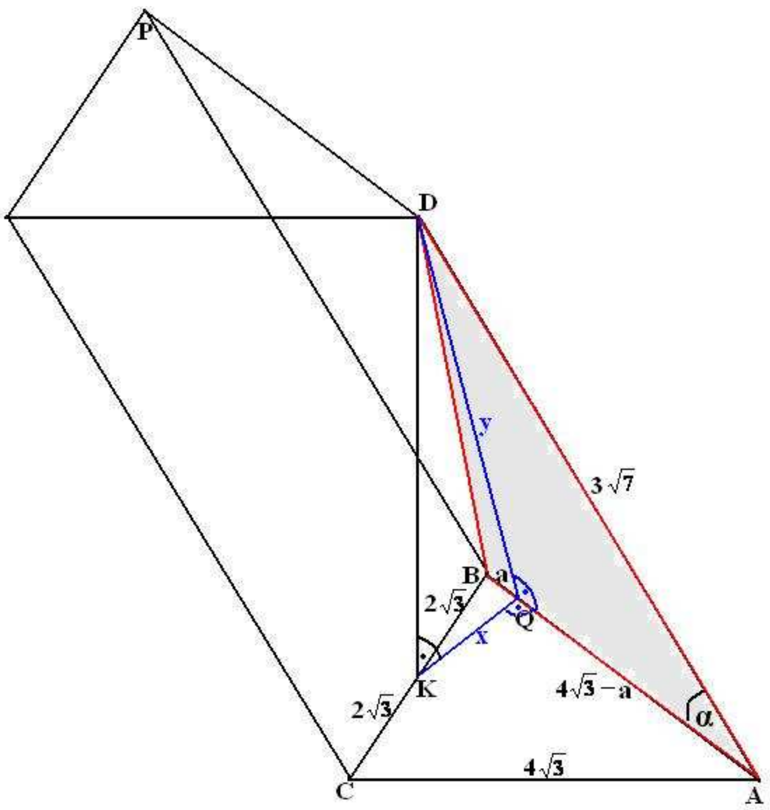
$$\cos\beta = \frac{|PQ|}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

****
****

Zadanie 4 - poziom wymagań: rozszerzony

Podstawą graniastosłupa ABCDEF jest trójkąt równoboczny o boku długości $4\sqrt{3}$. Rzut prostopadły wierzchołka D na płaszczyznę ABC jest środkiem krawędzi BC. Wyznacz miarę kąta między płaszczyzną ABC i płaszczyzną ABD, wiedząc, że krawędź boczna ma długość $3\sqrt{7}$.

Rozwiązanie



$|\angle KBQ| = 60^0$, dlatego w trójkącie BKQ:

$$\frac{x}{2\sqrt{3}} = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = 3$$

oraz

$$\frac{a}{2\sqrt{3}} = \cos 60^0 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \sqrt{3}$$

W trójkącie ADQ:

$$\cos\alpha = \frac{4\sqrt{3} - a}{3\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{3} - \sqrt{3}}{3\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

W trójkącie AQD stosujemy twierdzenie cosinusów:

$$y^2 = \left(3\sqrt{7}\right)^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 - 2\cdot 3\sqrt{7}\cdot 3\sqrt{3}\cdot\cos\alpha = 63 + 27 - 18\sqrt{21}\cdot\sqrt{\frac{3}{7}} = 90 - 54 = 36$$

$$y = 6$$

Szukany jest kąt KQD: $\cos\angle KQD = \frac{x}{y} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, stąd $\beta = 60^0$.

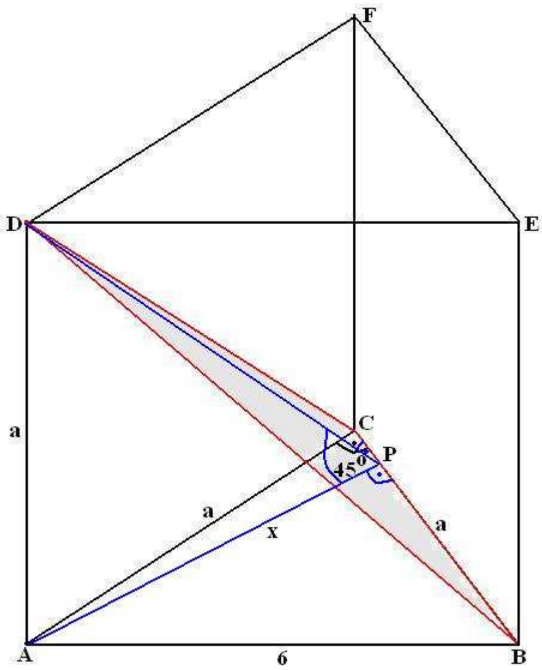
****
****

Zadanie 5 - poziom wymagań: rozszerzony

Wielościan ABCDEF jest graniastosłupem prostym, w którym $|AB| = 6$, $|AC| = |BC| = |AD| = a$, gdzie $a > 0$.

Dla jakiej wartości a kąt między płaszczyznami wyznaczonymi odpowiednio przez punkty A, B, C oraz D, B, C ma miarę 45^0?

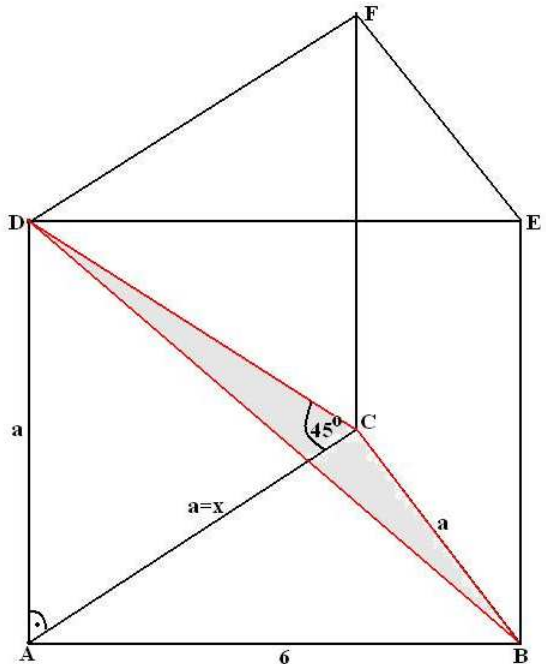
Rozwiązanie



$$\text{tg}45^0 = \frac{a}{x} = 1 \Leftrightarrow a = x$$

Taka sytuacja nie może zachodzić, bo a jest długością przeciwprostokątnej w trójkącie APC, zaś x – długością przyprostokątnej w tym trójkącie.

Wobec tego musi być tak:



Z definicji kąta dwuściennego wynika, że trójkąt ABC jest prostokątny, więc:
$a^2 + a^2 = 36 \Leftrightarrow a^2 = 18 \Leftrightarrow a = 3\sqrt{2}$.

****
****

Zadanie 6 - poziom wymagań: podstawowy

Ośmiu uczniów, wśród których są Ola i Janek, ustawiło się losowo w kolejce do sklepu. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że Ola i Janek nie stoją obok siebie. Wyniki przedstaw w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego.

Rozwiązanie

Oznaczmy: A - zdarzenie polegające na tym, że Ola i Janek nie stoją obok siebie.

$\overline{\overline{\Omega}} = 8!$ **- ilość wszystkich możliwych ustawień ośmiu osób w kolejkę.**

Obliczymy: $P(A) = 1 - P(A')$

A' **- zdarzenie polegające na tym, że Ola i Janek stoją obok siebie**

Ola i Janek mogą stać obok siebie na pozycjach: 1 i 2, 2 i 3, 3 i 4,..., 7 i 8, co daje 7 przypadków.

W każdym z tych przypadków Ola może stać przed Jankiem, lub za Jankiem – dlatego mamy $7 \cdot 2 = 14$ **możliwości.**

Jeżeli Ola i Janek zajmą już pozycje zgodnie z którąś z powyższych czternastu możliwości, to pozostałe 6 osób możemy ustawić na $6!$ **sposobów.**

W sumie: $\overline{\overline{A'}} = 14 \cdot 6!$

Stąd mamy:

$$P(A') = \frac{\overline{\overline{A'}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{14 \cdot 6!}{8!} = \frac{14}{7 \cdot 8} = \frac{1}{4}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

****
****

Zadanie 7 - poziom wymagań: I rok studiów

Ile jest różnych uporządkowanych par rozłącznych podzbiorów zbioru $\{1,2,3,...,n\}$?

Rozwiązanie

Metoda I

Dla $n=1$ ze zbioru $\{1\}$ mamy pary rozłącznych podzbiorów:

$(\varnothing,\varnothing)$, $(\varnothing,\{1\})$, $(\{1\},\varnothing)$ **($\varnothing$ - zbiór pusty).**

Jest ich 3.

Dla $n=2$ ze zbioru $\{1,2\}$ mamy pary rozłącznych podzbiorów:

$(\varnothing,\varnothing)$, $(\varnothing,\{1\})$, $(\{1\},\varnothing)$, $(\varnothing,\{2\})$, $(\{2\},\varnothing)$, $(\{1\},\{2\})$, $(\{2\},\{1\})$,
$(\varnothing,\{1,2\})$, $(\{1,2\},\varnothing)$

Jest ich 9, czyli 3^2.

Wobec tego stawiamy hipotezę, że wszystkich par rozłącznych podzbiorów zbioru $\{1,2,3,...,n\}$ jest 3^n. Hipotezę udowodnimy indukcyjnie.

Dla $n=1$ - sprawdziliśmy: $3^1=3$.

Zakładamy, że dla zbioru $\{1,2,3,...,n\}$ istnieje 3^n par rozłącznych podzbiorów.

Należy udowodnić, że dla zbioru $\{1,2,3,...,n,n+1\}$ istnieje 3^{n+1} par rozłącznych podzbiorów.

Dla zbioru $\{1,2,3,...,n,n+1\}$ mamy 3^n par. Niech (A,B) będzie taką parą.

Do zbioru została dołączona liczba $n+1$.

Wobec tego dla każdej pary (A,B) dojdą nowe pary $(A,B\cup\{n+1\})$ i $(A\cup\{n+1\},B)$.

Par było 3^n. Teraz jest $3\cdot 3^n=3^{n+1}$, co kończy dowód.

Metoda II

Liczba wszystkich par rozłącznych podzbiorów zbioru $\{1,2,3,...,n\}$ jest określona wzorem: $\binom{n}{0}\cdot 2^n+\binom{n}{1}\cdot 2^{n-1}+\binom{n}{2}\cdot 2^{n-2}+...+\binom{n}{n}\cdot 2^0$.

Uzasadnienie:

Przykładowo dla $n=2$ liczba $\binom{n}{2}\cdot 2^{n-2}$ została wyznaczona następująco:

- **wybieramy dowolny dwuelementowy podzbiór zbioru $\{1,2,3,...,n\}$ (będzie to pierwszy wyraz pary zbiorów)**
- **jako drugi wyraz pary zbiorów bierzemy dowolny podzbiór z $n-2$ elementowego zbioru, po odrzuceniu dwóch wybranych elementów. Korzystamy z tego, że zbiór k - elementowy ma 2^k podzbiorów.**

Korzystając teraz ze wzoru dwumianowego Newtona mamy:

$$\binom{n}{0}\cdot 2^n+\binom{n}{1}\cdot 2^{n-1}+\binom{n}{2}\cdot 2^{n-2}+...+\binom{n}{n}\cdot 2^0=(2+1)^n=3^n$$