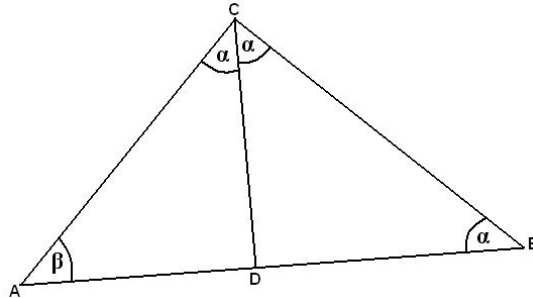


**Cztery zadania nadesłane przez internautów**

**Zadanie 1 – poziom wymagań: podstawowy**

W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest dwa razy większy od kąta przy wierzchołku B. Dwusieczna kąta przecina bok AB w punkcie D. Wykazać, że  $|AC|^2 = |AD| \cdot |AB|$ .

**Rozwiązanie**



$$\beta = 180^\circ - 3\alpha$$

$$|\angle ADC| = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (\alpha + 180^\circ - 3\alpha) = 2\alpha$$

Wobec tego trójkąty ABC i ACD są podobne, bo mają takie same kąty.

Korzystając z podobieństwa tych trójkątów, otrzymujemy:

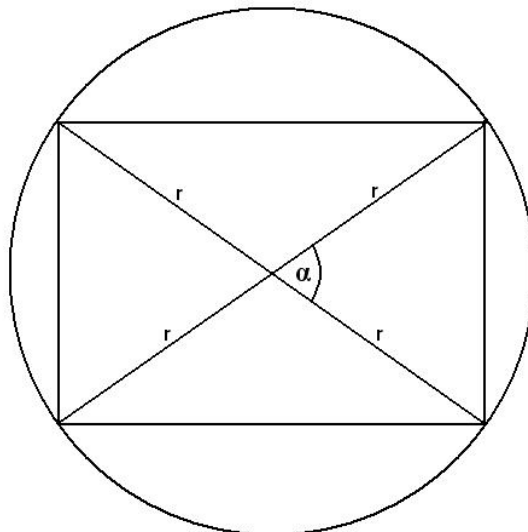
$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AD|} \Leftrightarrow |AC|^2 = |AD| \cdot |AB|, \text{ co należało udowodnić.}$$

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

**Zadanie 2 - poziom wymagań: rozszerzony**

Udowodnić, że stosunek pola prostokąta wpisanego w koło do pola tego koła jest mniejszy od  $\frac{2}{3}$ .

**Rozwiązanie**



Należy udowodnić, że  $\frac{S}{\pi r^2} < \frac{2}{3}$ , gdzie S – pole prostokąta.

Pole każdego czworokąta wypukłego można obliczyć jako połowę iloczynu długości przekątnych przez sinus kąta między przekątnymi, dlatego:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r \cdot \sin \alpha = 2r^2 \sin \alpha$$

Mamy:

$$\frac{S}{\pi r^2} = \frac{2r^2 \sin \alpha}{\pi r^2} = \frac{2 \sin \alpha}{\pi} \leq \frac{2}{\pi}$$

bo  $\sin \alpha \leq 1$

i dalej:

$$\frac{2}{\pi} < \frac{2}{3}, \text{ bo } \pi > 3.$$

Wynika stąd, że  $\frac{S}{\pi r^2} < \frac{2}{3}$ , co należało udowodnić.

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

### Zadanie 3 - poziom wymagań: rozszerzony

Obliczyć sumę  $S_n = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n$ .

#### Rozwiązanie

$$S_n = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n$$

$$x \cdot S_n = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \dots + nx^{n+1}$$

$$\begin{aligned} x \cdot S_n - S_n &= (x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \dots + nx^{n+1}) - (x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n) = \\ &= -x - x^2 - x^3 - \dots - x^n + nx^{n+1} \end{aligned}$$

mamy :

$$S_n \cdot (x - 1) = -x - x^2 - x^3 - \dots - x^n + nx^{n+1}$$

$$\text{Jeżeli } x = 1, \text{ to } S_n = 1 + 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1^3 + \dots + n \cdot 1^n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1+n}{2} \cdot n$$

$$\text{Jeżeli } x \neq 1, \text{ to } S_n = \frac{-x - x^2 - x^3 - \dots - x^n + nx^{n+1}}{x - 1}$$

$$-x - x^2 - x^3 - \dots - x^n = -(x + x^2 + x^3 + \dots + x^n) = -x \cdot \frac{1 - x^n}{1 - x} = -\frac{x(x^n - 1)}{x - 1}$$

Stąd:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{-x - x^2 - x^3 - \dots - x^n + nx^{n+1}}{x - 1} = \frac{-\frac{x(x^n - 1)}{x - 1} + nx^{n+1}}{x - 1} = \frac{\frac{n(x - 1)x^n - x(x^n - 1)}{x - 1}}{x - 1} = \\ &= \frac{n(x - 1)x^n - x(x^n - 1)}{(x - 1)^2} \end{aligned}$$

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

### Zadanie 4 - poziom wymagań: rozszerzony

Rozwiązać równanie z niewiadomą  $x$ :  $1 + a + a^2 + \dots + a^x = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)$ .

#### Rozwiązanie

Lewa strona równania jest sumą  $(x + 1)$  wyrazów ciągu geometrycznego.

Jeżeli  $a = 1$ , to lewa strona wynosi  $x + 1$ .

W tym przypadku:  $x = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4) - 1$ .

Jeżeli  $a \neq 1$ , to równanie przyjmuje postać:

$$1 \cdot \frac{1 - a^{x+1}}{1 - a} = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)$$

$$1 - a^{x+1} = (1 - a)(1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)$$

$$1 - a^{x+1} = (1 - a^2)(1 + a^2)(1 + a^4) \quad )$$

$$1 - a^{x+1} = (1 - a^4)(1 + a^4)$$

$$1 - a^{x+1} = 1 - a^8$$

$$a^{x+1} = a^8$$

**Dla  $a \neq 1$  otrzymujemy ostatecznie:**

$$x + 1 = 8 \Leftrightarrow x = 7$$