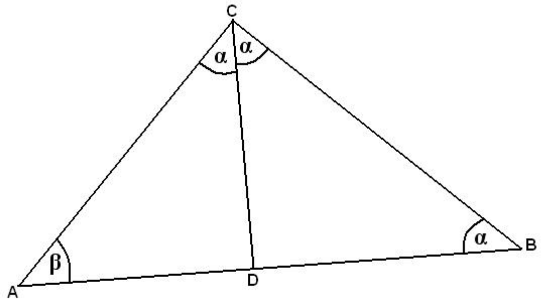
Cztery zadania nadesłane przez internautów

Zadanie 1.

W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest dwa razy większy od kąta przy wierzchołku B. Dwusieczna kąta przecina bok AB w punkcie D. Wykazać, że $|AC|^2 = |AD| \cdot |AB|$.

Rozwiązanie



$\beta = 180^\circ - 3\alpha$

$|\angle ADC| = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (\alpha + 180^\circ - 3\alpha) = 2\alpha$

Wobec tego trójkąty ABC i ACD są podobne, bo mają takie same kąty.
Korzystając z podobieństwa tych trójkątów, otrzymujemy:

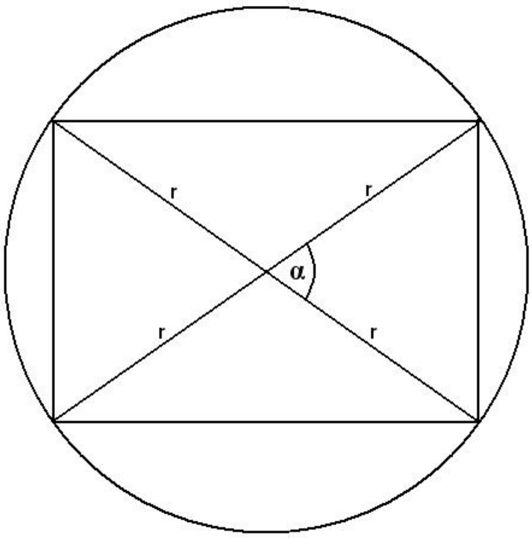
$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AD|} \Leftrightarrow |AC|^2 = |AD| \cdot |AB|$, **co należało udowodnić.**

****
****

Zadanie 2.

Udowodnić, że stosunek pola prostokąta wpisanego w koło do pola tego koła jest mniejszy od $\frac{2}{3}$.

Rozwiązanie



Należy udowodnić, że $\frac{S}{\pi r^2} < \frac{2}{3}$, gdzie S – pole prostokąta.

Pole każdego czworokąta wypukłego można obliczyć jako połowę iloczynu długości przekątnych przez sinus kąta między przekątnymi, dlatego:

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot 2r\cdot\sin\alpha=2r^2\sin\alpha$$

Mamy:

$$\frac{S}{\pi r^2}=\frac{2r^2\sin\alpha}{\pi r^2}=\frac{2\sin\alpha}{\pi}\le\frac{2}{\pi}$$

bo $\sin\alpha\le 1$

i dalej:

$\frac{2}{\pi}<\frac{2}{3}$**, bo** $\pi>3$.

Wynika stąd, że $\frac{S}{\pi r^2}<\frac{2}{3}$, co należało udowodnić.

****
****

Zadanie 3.

Obliczyć sumę $S_n=x+2x^2+3x^3+...+nx^n$.

Rozwiązanie

$$S_n=x+2x^2+3x^3+...+nx^n$$

$$x\cdot S_n=x^2+2x^3+3x^4+...+nx^{n+1}$$

$$x\cdot S_n-S_n=\left(x^2+2x^3+3x^4+...+nx^{n+1}\right)-\left(x+2x^2+3x^3+...+nx^n\right)=$$
$$=-x-x^2-x^3-...-x^n+nx^n$$

mamy :

$$S_n\cdot(x-1)=-x-x^2-x^3-...-x^n+nx^n$$

Jeżeli $x=1$, to $S_n=1+2\cdot 1^2+3\cdot 1^3+...+n\cdot 1^n=1+2+3+...+n=\frac{1+n}{2}\cdot n$

Jeżeli $x\ne 1$, to $S_n=\frac{-x-x^2-x^3-...-x^n+nx^n}{x-1}$

$$-x-x^2-x^3-...-x^n=-\left(x+x^2+x^3+...+x^n\right)=-x\cdot\frac{1-x^n}{1-x}=-\frac{x(x^n-1)}{x-1}$$

Stąd:

$$S_n=\frac{-x-x^2-x^3-...-x^n+nx^n}{x-1}=\frac{-\frac{x(x^n-1)}{x-1}+nx^n}{x-1}=\frac{\frac{n(x-1)x^n-x(x^n-1)}{x-1}}{x-1}=$$
$$=\frac{n(x-1)x^n-x(x^n-1)}{(x-1)^2}$$

****
****

Zadanie 4.

Rozwiązać równanie z niewiadomą x: $1+a+a^2+...+a^x=(1+a)(1+a^2)(1+a^4)$.

Rozwiązanie

Lewa strona równania jest sumą $(x+1)$ wyrazów ciągu geometrycznego.

Jeżeli $a=1$, to lewa strona wynosi $x+1$.

W tym przypadku: $x=(1+a)(1+a^2)(1+a^4)-1$.

Jeżeli $a\ne 1$, to równanie przyjmuje postać:

$$1 \cdot \frac{1-a^{x+1}}{1-a} = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)$$

$$1-a^{x+1} = (1-a)(1+a)(1+a^2)(1+a^4)$$

$$1-a^{x+1} = (1-a^2)(1+a^2)(1+a^4) \qquad)$$

$$1-a^{x+1} = (1-a^4)(1+a^4)$$

$$1-a^{x+1} = 1-a^8$$

$$a^{x+1} = a^8$$

Dla $a \neq 1$ otrzymujemy ostatecznie:

$$x+1=8 \iff x=7$$