Nietypowe zadania z różnych działów

Zadanie 1

Jaką figurę opisuje układ równań z parametrem t:

$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$ gdy $t \in \langle -1, 1 \rangle$?

Rozwiązanie

Eliminujemy parametr t:

$$3t = x + 2$$

$$t = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$y = 1 - 2t = 1 - 2\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right) = 1 - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

Szukana figura jest podzbiorem prostej, której równanie otrzymaliśmy.

$t \geq -1 \quad i \quad t \leq 1$

$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \geq -1 \quad i \quad \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \leq 1$

$\frac{1}{3}x \geq -\frac{5}{3} \quad i \quad \frac{1}{3}x \leq \frac{1}{3}$

$x \geq -5 \quad i \quad x \leq 1$

Jeżeli $x = -5$ **to** $y = -\frac{2}{3} \cdot (-5) - \frac{1}{3} = \frac{10}{3} - \frac{1}{3} = 3$

Stąd $A = (-5, 3)$

Jeżeli $x = 1$ **to** $y = -\frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} = -1$

Stąd $B = (1, -1)$

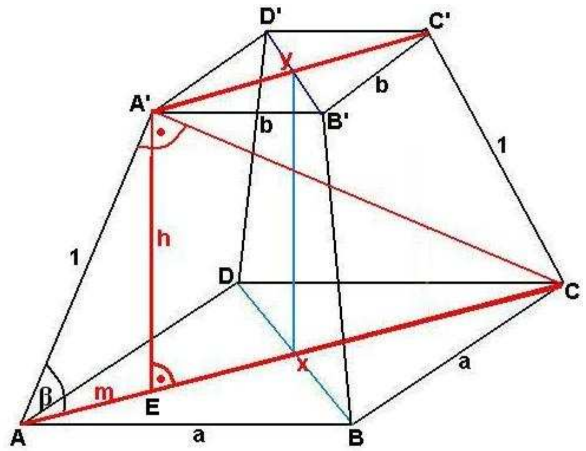
Ostatecznie podany układ równań opisuje odcinek o końcach $A = (-5, 3)$ **i** $B = (1, -1)$**.**

****

Zadanie 2

Krawędź boczna ściętego ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 1 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem β. Przekątna ostrosłupa jest prostopadła do krawędzi bocznej. Oblicz objętość ostrosłupa.

Rozwiązanie



W trójkącie AEA': $\sin\beta = \frac{h}{1} \quad \Leftrightarrow \quad h = \sin\beta$

W trójkącie ACA': $\cos\beta = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{\cos\beta}$

x jest długością przekątnej kwadratu o boku a, czyli $x = a\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cos\beta}$

W trójkącie AEA': $\cos\beta = \frac{m}{1} \quad \Leftrightarrow \quad m = \cos\beta$

$$y = x - 2m = \frac{1}{\cos\beta} - 2\cos\beta = \frac{1 - 2\cos^2\beta}{\cos\beta} = \frac{-(2\cos^2\beta - 1)}{\cos\beta} = \frac{-\cos 2\beta}{\cos\beta}$$

y jest długością przekątnej kwadratu o boku b, czyli $y = b\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{-\cos 2\beta}{\sqrt{2}\cos\beta}$

$\cos 2\beta < 0$, czyli $2\beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \quad \Leftrightarrow \quad \beta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

Pola podstaw ostrosłupa:

$$P_1 = a^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}\cos\beta}\right)^2 = \frac{1}{2\cos^2\beta}$$

$$P_2 = b^2 = \left(\frac{-\cos 2\beta}{\sqrt{2}\cos\beta}\right)^2 = \frac{\cos^2 2\beta}{2\cos^2\beta}$$

Korzystamy ze wzoru na objętość stożka ściętego:

$$V = \frac{1}{3}h\left(P_1 + P_2 + \sqrt{P_1P_2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\sin\beta\left(\frac{1}{2\cos^2\beta} + \frac{\cos^2 2\beta}{2\cos^2\beta} + \sqrt{\frac{1}{2\cos^2\beta}\cdot\frac{\cos^2 2\beta}{2\cos^2\beta}}\right) =$$