

*www.maturzysta.info*

**PRAKTYCZNE**

# **TABLICE MATEMATYCZNE**

Treści, które są wymagane tylko na poziomie rozszerzonym,  
umieszczono na żółtym tle.

Podział ten nie odpowiada w 100% wymaganiom maturalnym  
podawanym przez CKE, lecz został utworzony na zasadzie „mniej więcej”.

## PODSTAWY

### Przedrostki jednostek miar

Przedrostek	Znaczenie	Zapis skrócony	Oznaczenie
Tera	1 000 000 000 000	$10^{12}$	T
Giga	1 000 000 000	$10^9$	G
Mega	1 000 000	$10^6$	M
Kilo	1 000	$10^3$	k
Hekto	100	$10^2$	h
Deka	10	$10^1$	da
Decy	0,1	$10^{-1}$	d
Centy	0,01	$10^{-2}$	c
Mili	0,001	$10^{-3}$	m
Mikro	0,000 001	$10^{-6}$	$\mu$
Nano	0,000 000 001	$10^{-9}$	n
Piko	0,000 000 000 001	$10^{-12}$	p
Femto	0,000 000 000 000 001	$10^{-15}$	f

### Podstawowe cechy podzielności liczb

- Liczba jest podzielna przez 2, jeśli ostatnia z jej cyfr jest parzysta, czyli jest jedną z liczb: 2, 4, 6, 8, 0.
- Liczba jest podzielna przez 3, jeśli suma cyfr tej liczby jest podzielna przez 3.  
Przykład: 104628: suma cyfr  $1+0+4+6+2+8=21$ ,  $21: 2+1=3$ , jest podzielna przez 3.
- Liczba jest podzielna przez 4, jeśli liczba utworzona przez jej dwie ostatnie cyfry jest podzielna przez 4. Przykład: 104628 dzieli się przez 4, bo 28 dzieli się przez 4.
- Liczba jest podzielna przez 5, jeśli jej ostatnią cyfrą jest 0 lub 5.
- Liczba jest podzielna przez 6, jeśli jest podzielna zarówno przez 2, jak i przez 3.
- Liczba jest podzielna przez 9, jeśli suma cyfr tej liczby jest podzielna przez 9.
- Liczba jest podzielna przez 10, jeśli jej ostatnią cyfrą jest 0.

### Kolejność wykonywania działań arytmetycznych

- ➡ Zaczynamy wykonując obliczenia od działań w takich nawiasach, które nie zawierają innych nawiasów.
- ➡ Z wszystkich działań najpierw wykonujemy potęgowanie i pierwiastkowanie.
- ➡ Następnie wykonujemy mnożenie i dzielenie w kolejności ich występowania.
- ➡ Na końcu wykonujemy dodawanie i odejmowanie.

## Procenty

$$1\% = \frac{1}{100}$$

$$p\% \text{ z } a \text{ jest równe } \frac{p}{100} \cdot a$$

### Procent składany

- Jeżeli zakładamy lokatę wpłacając kwotę  $K$ , a odsetki są doliczane  $n$  razy ( $n$  okresów kapitalizacji), przy czym oprocentowanie za okres kapitalizacji wynosi  $p\%$ , to po upływie  $n$  okresów kapitalizacji na koncie będziemy mieli:

$$K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

**Przykład:** składamy 1000 zł na okres dwóch lat. Oprocentowanie w skali rocznej wynosi 4%, a kapitalizacja odsetek jest kwartalna. Wobec tego oprocentowanie za okres kapitalizacji (za kwartał) wynosi 1%. Okresów kapitalizacji jest 8 (8 kwartałów). Po upływie dwóch lat na koncie będziemy mieli:  $1000 \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right)^8$

- Jeżeli uwzględniamy 20% podatek od odsetek bankowych, wzór jest następujący:  $K \cdot \left(1 + \frac{0,8 \cdot p}{100}\right)^n$ , gdyż zostanie nam doliczone tylko 0,8 (80%) odsetek.

### Wartość bezwzględna

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

$$|x| = |-x|$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$|x|$  - odległość liczby  $x$  od liczby 0 na osi liczbowej

$|x - y|$  - odległość liczb  $x$  i  $y$  na osi liczbowej

### Równania i nierówności z wartością bezwzględną

- Jeżeli  $a > 0$  to  $|x| = a \Leftrightarrow (x = a \text{ lub } x = -a)$

**Przykład:**  $|x| = 28 \Leftrightarrow (x = 28 \text{ lub } x = -28)$

- Jeżeli  $a > 0$  to  $|x| < a \Leftrightarrow (x < a \text{ i } x > -a) \Leftrightarrow x \in (-a, a)$

**Przykład:**  $|x| < 28 \Leftrightarrow (x < 28 \text{ i } x > -28) \Leftrightarrow x \in (-28, 28)$

- Jeżeli  $a > 0$  to  $|x| > a \Leftrightarrow (x > a \text{ lub } x < -a) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$

**Przykład:**

$$|x| > 28 \Leftrightarrow (x > 28 \text{ lub } x < -28) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -28) \cup (28, +\infty)$$

### Wzory skróconego mnożenia

- Kwadrat sumy:  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- Kwadrat różnicy:  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- Różnica kwadratów:  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- Sześciąt sumy:  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- Sześciąt różnicy:  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- Suma sześciątów:  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- Różnica sześciątów:  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- Kwadrat sumy trzech składników:  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
- $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \dots + 1)$

### Przybliżenia

Jeżeli liczba  $b$  jest przybliżeniem liczby  $a$ , to

- błąd przybliżenia:  $b - a$ .
- błąd bezwzględny:  $|b - a|$
- błąd względny:  $\frac{|b-a|}{a}$

### Wartości średnie

- Średnia arytmetyczna  $n$  liczb  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ :

$$s_a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}$$

- Średnia geometryczna  $n$  liczb nieujemnych  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ :

$$s_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n}$$

- Średnia ważona  $n$  liczb  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , które mają przypisane wagi odpowiednio

$w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ :

$$s_w = \frac{x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + x_3 \cdot w_3 + \dots + x_n \cdot w_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n}$$

## LOGIKA I TEORIA ZBIORÓW

### Sposoby zapisywania zdań złożonych

- ➡ **Koniunkcja zdań:** " $p$  i  $q$ " lub " $p \wedge q$ " lub " $p, q$ " lub  $\begin{cases} p \\ q \end{cases}$
- ➡ **Alternatywa zdań:** " $p$  lub  $q$ " lub " $p \vee q$ "
- ➡ **Implikacja zdań:** "jeżeli  $p$  to  $q$ " lub " $p \Rightarrow q$ "
- ➡ **Równoważność zdań:** " $p$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $q$ " lub " $p \Leftrightarrow q$ "

### Tabela wartości logicznych zdań złożonych

$p$	$q$	$\sim p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

### Prawa rachunku zdań

- ➡ Prawa de Morgana  
 $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$  oraz  $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
- ➡ Reguła odrywania:  $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$   
 Jeżeli prawdziwa jest implikacja oraz jej poprzednik  $p$ , to również następnik  $q$  jest prawdziwy.  
 Prawo to mówi, jak należy korzystać z twierzeń:
  - twierdzenie  $Z \Rightarrow T$  musi być prawdziwe (udowodnione),
  - $Z$  musi być prawdziwe (należy sprawdzić, czy są spełnione założenia twierdzenia),
  - teraz dopiero można korzystać z tezy  $T$ .
- ➡ Prawo przechodniości implikacji:  $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
- ➡ Prawo kontrapozycji:  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$   
 Prawo to mówi, że jeżeli jest prawdziwe twierdzenie  $Z \Rightarrow T$ , to jest również prawdziwa kontrapozycja tego twierdzenia:  $\sim T \Rightarrow \sim Z$ , np. twierdzenie Pitagorasa (w skrócie):  
 „Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to  $(a^2 + b^2 = c^2)$ ” i jego kontrapozycja:  
 „Jeżeli  $(a^2 + b^2 \neq c^2)$ , to trójkąt nie jest prostokątny”.
- ➡ Prawo podwójnego przeczenia:  $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$
- ➡ Zaprzeczenie implikacji:  $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$
- ➡  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$
- ➡  $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$