Geometria analityczna

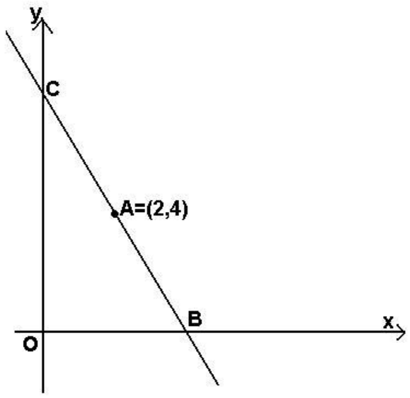
5 pkt.

Wyznacz równanie prostej, która przechodzi przez punkt $A = (2, 4)$ i tworzy z osiami układu współrzędnych trójkąt o polu równym 2.

****

****

Rozwiązanie



Prosta $y = ax + b$ przechodzi przez punkt $A = (2, 4)$, wobec tego:

$$4 = a \cdot 2 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 4 - 2a$$

Stąd: $y = ax + 4 - 2a$

Z otrzymanego równania wynika, że współrzędne punktu C są następujące: $C = (0, 4 - 2a)$.

Liczymy współrzędne punktu B:

$$ax + 4 - 2a = 0$$
$$ax = 2a - 4$$
$$x = \frac{2a-4}{a} \;, \quad a \neq 0$$

Mamy: $B = \left(\frac{2a-4}{a}, 0\right)$.

Pole trójkąta OBC:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |OB| \cdot |OC| = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{2a-4}{a}\right| \cdot |4 - 2a| = \left|\frac{1}{2} \cdot \frac{2(a-2)}{a} \cdot (-2)(a-2)\right| =$$

$$= \left|\frac{2(a-2)^2}{a}\right| = \frac{2(a-2)^2}{|a|}$$

Ma być:

$$\frac{2(a-2)^2}{|a|} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad (a-2)^2 = |a|$$

$$a^2 - 4a + 4 = |a|$$

1^o Jeżeli $a > 0$, to równanie przyjmuje postać:

$$a^2 - 4a + 4 = a$$
$$a^2 - 5a + 4 = 0$$
$$\Delta = 25 - 16 = 9$$
$$a_1 = \frac{5-3}{2} = 1 \;, \quad a_2 = \frac{5+3}{2} = 4$$

$a_1 > 0$ i $a_2 > 0$, czyli obydwie wartości są rozwiązaniami równania.

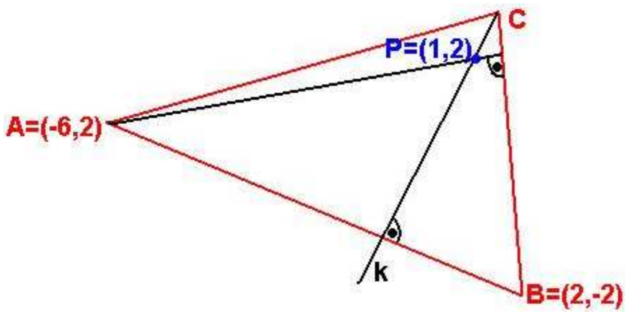
2° Jeżeli $a < 0$, to równanie przyjmuje postać:

$a^2 - 4a + 4 = -a$
$a^2 - 3a + 4 = 0$
$\Delta = 9 - 16 = -7$ - brak rozwiązań

Otrzymaliśmy: $a = 1$ lub $a = 4$.
$y = ax + 4 - 2a$

Dla $a = 1$: $y = x + 2$
Dla $a = 4$: $y = 4x - 4$

Zadanie ma dwa rozwiązania: $y = x + 2$ lub $y = 4x - 4$.
****
****
5 pkt.
W trójkącie ABC dane są $A = (-6, 2)$, $B = (2, -2)$ oraz punkt przecięcia prostych zawierających wysokości trójkąta $P = (1, 2)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C.
****
****
Rozwiązanie



$\overrightarrow{AB} = [8, -4]$
Prosta k zawiera wysokość poprowadzoną z wierzchołka C i jest prostopadła do wektora $\overrightarrow{AB}$, dlatego ma równanie:
$8x - 4y + m = 0$

Współrzędne punktu $P = (1, 2)$ spełniają równanie prostej k:
$8 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 0$
Stąd k ma równanie $8x - 4y = 0$, czyli $y = 2x$.

Punkt C należy do prostej k, czyli ma współrzędne: $C = (c, 2c)$.

Prosta AP zawiera wysokość poprowadzoną z wierzchołka A i ma równanie $y = 2$ (jest równoległa do osi OX).
Wobec tego prosta zawierająca bok BC jest do prostej AP prostopadła, czyli ma równanie $x = 2$ (jest prostopadła do osi OX i przechodzi przez punkt B).
Wynika z tego, że pierwsza współrzędna punktu C jest równa 2, czyli punkt C ma współrzędne $C = (2, 4)$.
****
****