# Co można, a czego nie można zrobić z równaniem i dlaczego?

**Każda operacja na równaniu to tak naprawdę jedno z dwojga:**
1. **„zadziałanie” na obydwie strony równania pewną funkcją, albo**
2. **opuszczenie po obydwu stronach równania znaku pewnej funkcji.**

Powyższe zdanie dotyczy wszystkich operacji wykonywanych na równaniach, także tych, które uczeń poznaje już w szkole podstawowej i gimnazjum, jak pomnożenie obydwu stron równania przez liczbę różną od zera, czy dodanie do obydwu stron równania dowolnego wyrażenia.

| **Przykłady**: |
|---|
| Mamy równanie: $(\mathbf{LewaStrona})^3 = (\mathbf{PrawaStrona})^3$<br>Równanie ma postać $\mathbf{f(LewaStrona) = f(PrawaStrona)}$, gdzie $\mathbf{f(x) = x^3}$<br>Opuszczając znak tej funkcji otrzymujemy: $\mathbf{LewaStrona = PrawaStrona}$ |
| Mamy równanie: $\mathbf{LewaStrona = PrawaStrona}$<br>Działając na obydwie strony równania funkcją $\mathbf{f(x) = ax}$ **, gdzie** $\mathbf{a \neq 0}$ otrzymujemy:<br>$\mathbf{f(LewaStrona) = f(PrawaStrona)}$, tzn.<br>$\mathbf{a \cdot LewaStrona = a \cdot PrawaStrona}$<br>Zadziałanie na obydwie strony równania podaną funkcją, to pomnożenie obydwu stron przez liczbę a różną od zera. |

Niektóre z takich operacji wykonywanych na równaniach są poprawne, tzn. po ich wykonaniu **nie zmieni się zbiór rozwiązań równania** (mówimy wtedy, że otrzymaliśmy równanie **równoważne** równaniu wyjściowemu).
Niektóre jednak zmieniają zbiór rozwiązań – tych nie należy wykonywać.

| **Przykład użycia błędnej operacji** |
|---|
| Równanie wyjściowe: $\mathbf{x = 2}$<br>Równanie ma jedno rozwiązanie: jest nim liczba **2**.<br>Bierzemy funkcję $\mathbf{f(x) = x^2}$ i wykonujemy $\mathbf{f(x) = f(2)}$, w efekcie czego otrzymamy: $\mathbf{x^2 = 4}$.<br>To ostatnie równanie ma dwa rozwiązania: $\mathbf{x_1 = 2}$, $\mathbf{x_2 = -2}$, czyli zbiór rozwiązań równania się zmienił: został powiększony o jedno „fałszywe” rozwiązanie, które nie jest rozwiązaniem równania wyjściowego. |

**Sztuka rozwiązywania równania polega więc na wykonywaniu na nich takich operacji, które nie zmieniają zbioru rozwiązań, a jedynie zmieniają postać równania – najlepiej w kierunku jego maksymalnego uproszczenia.**

Powstaje pytanie: które operacje są dopuszczalne, a które nie?
Odpowiedź na to pytanie jest ukryta w definicji funkcji różnowartościowej:
**„Funkcję f(x) nazywamy różnowartościową, jeżeli dla dowolnych argumentów** $\mathbf{x_1}$ **,** $\mathbf{x_2}$ **zachodzi:** $\mathbf{f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2}$**”,**
co można powiedzieć inaczej: „wartości funkcji są równe **tylko** dla równych argumentów”.

Jak widać w definicji tej wyraźnie zapisano, że **jeżeli funkcja jest różnowartościowa, to równania** $\mathbf{f(x_1) = f(x_2)}$ **oraz** $\mathbf{x_1 = x_2}$ **są równoważne** (czytaj: **mają taki sam zbiór rozwiązań**).

W poniższej tabeli przedstawiono wykaz najczęściej używanych, **poprawnych** operacji na równaniach:

| Operacja | Przykład | Uzasadnienie poprawności |
|---|---|---|
| Podniesienie obydwu stron równania do nieparzystej potęgi (albo opuszczenie po obydwu stronach równania takiej potęgi) | $\mathbf{x^3 = 2^3}$<br>$\mathbf{x = 2}$ | Funkcje $\mathbf{f(x) = x^3, f(x) = x^5}$, $\mathbf{f(x) = x^7,...}$ są różnowartościowe |
| Podniesienie obydwu stron równania do parzystej potęgi (albo opuszczenie po obydwu stronach równania takiej potęgi), **lecz jedynie w przypadku , gdy:**<br>**---obydwie strony równania są nieujemne, albo**<br>**--- obydwie strony równania są niedodatnie**<br>**dla wszystkich wartości x z dziedziny równania** | $\mathbf{x^2 + 3 = \sqrt{2x^2 + 1}}$<br>$\mathbf{(x^2 + 3)^2 = 2x^2 + 1}$ | Różnowartościowe są funkcje:<br>$\mathbf{f(x) = x^n}$ , gdy n jest parzyste ale pod warunkiem, że funkcje te są **zawężone do dziedziny:**<br>$\mathbf{(-\infty, 0\rangle}$ **albo** $\mathbf{\langle 0, \infty)}$,<br>np.: $\mathbf{f(x) = x^2, x \in \langle 0, \infty)}$ |
| Pierwiastkowanie obydwu stron równania pierwiastkiem stopnia nieparzystego | $\mathbf{x^5 = -32}$<br>$\mathbf{\sqrt[5]{x^5} = \sqrt[5]{-32}}$<br>$\mathbf{x = -2}$ | Funkcje $\mathbf{f(x) = \sqrt[n]{x}}$ ,<br>$\mathbf{n \in \{3,5,7,9,...\}}$<br>są różnowartościowe |
| Pierwiastkowanie obydwu stron równania pierwiastkiem stopnia parzystego, **lecz tylko wtedy, gdy obydwie strony równania są nieujemne** | $\mathbf{x^4 = 16}$<br>$\mathbf{\sqrt[4]{x^4} = \sqrt[4]{16}}$<br>$\mathbf{\|x\| = 2}$<br>$\mathbf{x = 2}$ **lub** $\mathbf{x = -2}$<br>Uwaga: $\mathbf{\sqrt[4]{x^4} = \|x\|}$, podobnie jak $\mathbf{\sqrt{x^2} = \|x\|}$ | Funkcje $\mathbf{f(x) = \sqrt[n]{x}}$**,** $\mathbf{x \geq 0}$ ,<br>$\mathbf{n \in \{2,4,6,8,...\}}$<br>są różnowartościowe |
| Logarytmowanie obydwu stron równania (lub opuszczenie logarytmów po obydwu stronach równania), gdy obydwie strony równania są dodatnie | $\mathbf{\log_3(x-2) = \log_3 8}$<br>Dziedzina równania: $\mathbf{x > 2}$<br>Opuszczamy logarytmy:<br>$\mathbf{x - 2 = 8}$ | Wszystkie funkcje logarytmiczne są różnowartościowe |
| Opuszczenie znaku funkcji wykładniczej lub użycie tej funkcji | $\mathbf{2^{4x-2} = 2^3}$<br>$\mathbf{4x - 2 = 3}$ | Wszystkie funkcje wykładnicze są różnowartościowe |